

Übungsblatt 6

Hausübungen

Die Hausübungen müssen bis **Dienstag, den 29.05.18, um 12:00 Uhr** in den Briefkasten "Lineare Algebra II" mit Ihrer Übungsgruppennummer im Mathematischen Institut, Raum 301 abgegeben werden.

H17 (10 Punkte):

- (i) Zeigen Sie, dass für den Jordanblock

$$J_\lambda(n) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

gilt, dass $M_{J_\lambda(n)} = P_{J_\lambda(n)} = (X - \lambda)^n$, für das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom.

- (ii) Zeigen Sie, dass für eine quadratische Matrix $A = \text{diag}(C_1, \dots, C_k)$ in Blockdiagonalform mit Blöcken C_i gilt, dass $M_A = \text{kgV}(M_{C_1}, \dots, M_{C_k})$.
- (iii) Zeigen Sie, dass für Matrizen in $K^{n \times n}$, deren charakteristisches Polynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt, die Jordannormalform eindeutig durch das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom bestimmt ist, wenn $n \leq 3$.
- (iv) Finden Sie zwei 4×4 -Matrizen mit (wesentlich) unterschiedlicher Jordannormalform, die dieselben charakteristischen Polynome und Minimalpolynome besitzen.

Lösungsskizze. (i) Die Aussage über das charakteristische Polynom ist schon bekannt/bzw. trivial nachzurechnen. Das Minimalpolynom ist nun ein Teiler des charakteristischen Polynoms, also von der Form $(X - \lambda)^k$. Wenn wir die Potenzen von $(J_\lambda(n) - \lambda E)$ betrachten, dann ist genau die n -te Potenz zum ersten Mal die Nullmatrix. Das Minimalpolynom stimmt mit dem charakteristischen Polynom überein.

- (ii) Das ist einfach nachzurechnen. Beachte dazu, dass offensichtlich $P(A) = \text{diag}(P(C_1), \dots, P(C_k))$ für alle Polynome $P(X) \in K[X]$. Ein annullierendes Polynom muss also schon die einzelnen C_i -Blöcke annullieren und ist damit jeweils ein Vielfaches der Minimalpolynome der Blöcke. Andererseits annulliert das kleinste gemeinsame Vielfache der Minimalpolynome schon alle Blöcke und damit die ganze Matrix.
- (iii) Das charakteristische Polynom legt die Dimensionen der Haupträume fest und aus dem Minimalpolynom kann man die Größe des jeweils größten vorkommenden Jordanblockes ablesen (siehe (ii) und (i)). Man kann feststellen, dass durch diese Informationen schon die Struktur der Jordannormalform bestimmt ist, wenn $n \leq 3$.

(iv) Man hat z.B.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

mit charakteristischen Polynomen $(X - \lambda)^4$ und Minimalpolynomen $(X - \lambda)^2$.

H18 (10 Punkte): Bringen Sie die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -7 & -32 & -32 & -35 \\ 1 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$$

auf Jordannormalform. Bestimmen Sie für die Matrix B auch explizit eine dazugehörige Jordanbasis.

Lösungsskizze. Es ist $P_A = (X - 1)^3$. Man berechnet leicht $\dim(\text{Eig}(A, 1)) = 1$, damit gibt es nur einen Jordanblock und die Jordannormalform von A ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Matrix B gilt, dass $P_B = (X - 1)^4$. Weiter berechnet man $\dim(\text{Eig}(B, 1)) = 2$. Damit gibt es entweder zwei Zweierblöcke zum Eigenwert 1 oder einen Einerblock und einen Dreierblock. Man berechnet noch $\dim(\text{Eig}_2(B, 1)) = 3$. Damit liegt ein Einerblock und ein Dreierblock vor und die Jordannormalform von B ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Berechnung einer Jordanbasis geht man nach dem Algorithmus aus dem Skript vor. Da es hier nur einen Eigenwert gibt, stimmt der ganze Vektorraum $\mathbb{C}^{4 \times 4}$ mit dem Hauptraum zum Eigenwert 1 überein. Der kleinste Index r , sodass $\text{Eig}_r(B, 1) = \text{Hau}(B, 1)$ ist hier $r = 3$. Wir müssen also als erstes ein Komplement von $\text{Eig}_2(B, 1)$ in $\text{Eig}_3(B, 1) = \mathbb{C}^{4 \times 4}$ finden. Dazu bestimmen wir eine Basis von $\text{Eig}_2(B, 1)$ und ergänzen diese zu einer Basis des ganzen $\mathbb{C}^{4 \times 4}$. Man findet z.B. $((1, 0, 0, 0)^T, (0, 1, 0, 0)^T, (0, 0, 1, 0)^T)$ als eine Basis von $\text{Eig}_2(B, 1)$. Man ergänzt jetzt z.B. mit $v = (0, 0, 0, 1)$ zu einer Basis des ganzen Raumes. Nach dem Skript ist jetzt $((B - E)^2 v, (B - E)v, v)$ eine Teilbasis, die zu dem Dreier-Jordanblock korrespondiert. Explizit erhält man hier $((-8, 1, 1, 0)^T, (-35, 4, 5, 0)^T, (0, 0, 0, 1)^T)$ als Teilbasis zum Dreierblock. Der nächste Schritt nach dem Algorithmus wäre, ein Komplement von $\text{Eig}(B, 1) \oplus \mathbb{C}(-35, 4, 5, 0)^T$ in $\text{Eig}_2(B, 1)$ zu bestimmen. Dieses ist aber null, da $\dim(\text{Eig}(B, 1) \oplus \mathbb{C}(-35, 4, 5, 0)^T) =$

$3 = \dim(\text{Eig}_2(B, 1))$. Es gibt ja keine Zweierblöcke. Im letzten Schritt bestimmen wir ein Komplement von $\mathbb{C}(-8, 1, 1, 0)^T$ in $\text{Eig}(B, 1)$. Dazu bestimmen wir erst eine Basis von $\text{Eig}(B, 1)$. Man findet z.B. $((-4, 1, 0, 0)^T, (-4, 0, 1, 0)^T)$ als Basis des Eigenraumes. Man kann jetzt $(-8, 1, 1, 0)^T$ z.B. mit $(-4, 1, 0, 0)^T$ zu einer Basis des Eigenraumes ergänzen. Man erhält insgesamt als eine Jordanbasis

$$((-4, 1, 0, 0)^T, (-8, 1, 1, 0)^T, (-35, 4, 5, 0)^T, (0, 0, 0, 1)^T).$$

H19 (10 Punkte): In dieser Aufgabe betrachten wir die e -Funktion für Matrizen in $\mathbb{C}^{n \times n}$ oder $\mathbb{R}^{n \times n}$. Sei A eine solche Matrix. Dann definieren wir $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$. Diese Reihe konvergiert für alle reellen oder komplexen Matrizen bzgl. einer beliebigen Matrixnorm und definiert eine Abbildung $\mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ bzw. $\mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$. Es gilt $e^{A+B} = e^A e^B$ für Matrizen A, B mit $AB = BA$ (sonst gilt diese Funktionalgleichung der e -Funktion nicht!).

- (i) Zeigen Sie, dass $e^{S^{-1}AS} = S^{-1}e^A S$ für invertierbare Matrizen S .
- (ii) Zeigen Sie, dass für eine Matrix $A = \text{diag}(C_1, \dots, C_m)$ in Blockdiagonalform gilt, dass $e^A = \text{diag}(e^{C_1}, \dots, e^{C_m})$.
- (iii) Berechnen Sie $e^{J_\lambda(n)}$ für den Jordanblock $J_\lambda(n)$.
- (iv) Zeigen Sie, dass $\det(e^A) = e^{\text{Spur}(A)}$ für alle Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Hinweis: Über \mathbb{C} zerfallen alle Polynome in Linearfaktoren.

Bonus (5 Punkte): Berechnen Sie

$$e \begin{pmatrix} 0 & -\phi \\ \phi & 0 \end{pmatrix}$$

für $\phi \in \mathbb{R}$.

Lösungsskizze. (i) Es ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (S^{-1}AS)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} S^{-1}A^k S = S^{-1}(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k) S$.

- (ii) Die Addition und Multiplikation von Matrizen in Blockdiagonalform ergibt sich blockweise. Auch die Reihe kann dann blockweise gebildet werden.
- (iii) Es ist $J_\lambda(n) = \lambda E_n + H$ die Zerlegung in den skalaren und den nilpotenten Teil. Diese beiden Matrizen vertauschen und es gilt nach der Eingangsbemerkung, dass $e^{J_\lambda(n)} = e^{\lambda E_n} e^H$. Nach (ii) gilt weiter $e^{\lambda E_n} = e^\lambda E_n$. Es ist leicht auszurechnen, dass

$$e \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ & 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} \\ & & & & 1 & \frac{1}{1!} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$e^{J_\lambda(n)} = e^\lambda \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ & 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} \\ & & & & 1 & \frac{1}{1!} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

- (iv) Da $\det(S^{-1}AS) = \det(A)$ und auch $\text{Spur}(S^{-1}AS) = \text{Spur}(A)$ gilt, können wir wegen (i) oBdA annehmen, dass A eine Matrix in Jordannormalform ist (alle Polynome über \mathbb{C} zerfallen). Wegen (ii) und der Multiplikativität der Determinante für Blockdiagonalmatrizen und der Additivität der Spur für solche Matrizen und der Funktionalgleichung der skalaren e -Funktion können wir weiter oBdA annehmen, dass A ein Jordanblock ist. Dann liest man die Aussage aus der (iii) ab.

Bonus: Wir können die Matrix mit der Basiswechsellmatrix $S = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ zu $\begin{pmatrix} i\phi & 0 \\ 0 & -i\phi \end{pmatrix}$ diagonalisieren. Damit und der (i) berechnet sich die e -Funktion zu $e \begin{pmatrix} 0 & -\phi \\ \phi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$.