Übungsblatt 7

Hausübungen

Die Hausübungen müssen bis **Dienstag, den 05.06.18, um 12:00 Uhr** in den Briefkasten "Lineare Algebra II" mit Ihrer Übungsgruppennummer im Mathematischen Institut, Raum 301 abgegeben werden.

H20 (10 Punkte): Seien $h_1 : V \to W$ und $h_2 : W \to X$ lineare Abbildungen zwischen den K-Vektorräumen V, W und X.

(i) Zeigen Sie, dass $(h_2 \circ h_1)^* = h_1^* \circ h_2^*$ für die dualen Abbildungen gilt.

(ii) Zeigen Sie außerdem, dass h^* ein Isomorphismus ist, wenn h ein Isomorphismus ist, für lineare Abbildungen $h : V \to W$, und dass $(h^*)^{-1} = (h^{-1})^*$.

Lösungsskizze. (i) Es gilt $(h_2 \circ h_1)^*(f) = f \circ (h_2 \circ h_1) = (f \circ h_2) \circ h_1 = h_1^*(h_2^*(f)) = (h_1^* \circ h_2^*)(f)$ für $f \in X^*$.

(ii) Es gilt $(h^* \circ (h^{-1})^*)(f) = (f \circ h^{-1}) \circ h = f \circ (h^{-1} \circ h) = f \circ \mathrm{id} = f$ und genauso anders herum. Damit ist $(h^{-1})^*$ das Inverse zu h^*.

H21 (10 Punkte): Sei $f : V \to W$ linear, $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V und $C = (c_1, \dots, c_m)$ eine Basis von W. Sei weiter $f^* : W^* \to V^*$ die duale Abbildung und C^*, B^* die dualen Basen.

(i) Zeigen Sie, dass für die Abbildungsmatrizen $\mathcal{M}_{B^*}^{C^*}(f^*) = (\mathcal{M}_C^B(f))^T$ gilt.

(ii) Sei $\beta : V \times W \to K$ eine Bilinearform und G die Gram-Matrix von β bezüglich der Basen B und C.

Zeigen Sie, dass die Gram-Matrix G' von β bezüglich neuer Basen B', C' von V, W gegeben ist durch $G' = (\mathcal{M}_B^{B'}(\mathrm{id}_V))^T \cdot G \cdot \mathcal{M}_C^{C'}(\mathrm{id}_W)$.

Lösungsskizze. (i) Es sei $\mathcal{M}_C^B(f) = (a_{ij})$. Das heißt $f(b_j) = a_{1j}c_1 + \cdots + a_{mj}c_m$.

Wir betrachten das Element c_i^* der dualen Basis C^* und werten f^* daran aus: $f^*(c_i^*) = c_i^* \circ f \in V^*$. An der Stelle b_j gilt weiter $(c_i^* \circ f)(b_j) = a_{ij}$, wenn $f(b_j) = a_{1j}c_1 + \cdots + a_{mj}c_m$. Also $f^*(c_i^*) = (c_i^* \circ f) = a_{i1}b_1^* + \cdots + a_{in}b_n^*$. Die i-te Spalte von $\mathcal{M}_{B^*}^{C^*}(f^*)$ entspricht also der i-ten Zeile von $\mathcal{M}_C^B(f)$. Das ist die Aussage.

(ii) Es gilt $\beta(v, w) = x^T G y$, wenn x, y die Koordinatenvektoren von v, w bezüglich der Basen B, C sind. Damit gilt aber auch, dass $\beta(v, w) = (\mathcal{M}_B^{B'}(\mathrm{id}_V) \cdot x')^T \cdot G \cdot (\mathcal{M}_C^{C'}(\mathrm{id}_W) \cdot y')$, wenn x', y' die Koordinatenvektoren von v, w bezüglich der Basen B', C' sind. Andererseits gilt, dass $\beta(v, w) = (x')^T G' y'$. Also

$$(x')^T \big((\mathcal{M}_B^{B'}(\mathrm{id}_V))^T \cdot G \cdot \mathcal{M}_C^{C'}(\mathrm{id}_W)\big) y' = (x')^T G' y'.$$

Daraus folgt die Aussage.

Eine alternative Lösung erhält man mit der Vorlesung so: Die Gram-Matrix G von β stimmt mit der Abbildungsmatrix $\mathcal{M}^{C}_{B^*}(\beta_2)$ überein, wobei $\beta_2 : W \to V^*$ mit $\beta_2(w) \mapsto \beta(\cdot, w)$. Genauso $G' = \mathcal{M}^{C'}_{(B')^*}(\beta_2)$. Mit der Transformationsformel für Abbildungsmatrizen gilt dann

$$G' = \mathcal{M}^{C'}_{(B')^*}(\beta_2) = \mathcal{M}^{B^*}_{(B')^*}(\mathrm{id}_{V^*}) \cdot \mathcal{M}^{C}_{B^*}(\beta_2) \cdot \mathcal{M}^{C'}_{C}(\mathrm{id}_W).$$

Also

$$G' = \mathcal{M}^{B^*}_{(B')^*}(\mathrm{id}_{V^*}) \cdot G \cdot \mathcal{M}^{C'}_{C}(\mathrm{id}_W).$$

Es bleibt noch zu bemerken, dass $\mathrm{id}_{V^*} = (\mathrm{id}_V)^*$ und damit nach der (i)

$$\mathcal{M}^{B^*}_{(B')^*}(\mathrm{id}_{V^*}) = (\mathcal{M}^{B'}_{B}(\mathrm{id}_V))^T.$$

H22 (10 Punkte): Sei V ein K-Vektorraum, $W_1, W_2 \subset V$ Unterräume.

(i) Zeigen Sie, dass $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$ für die Annulatoren gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass $W_1^0 + W_2^0 \subset (W_1 \cap W_2)^0$.

(iii) Zeigen Sie, dass in (ii) Gleichheit gilt, wenn $\dim(V) < \infty$.

Lösungsskizze. (i) Es gilt $(W_1 + W_2)^0 \subset W_1^0 \cap W_2^0$. Denn eine Linearform, die auf der Summe $W_1 + W_2$ verschwindet, verschwindet auch auf W_1 und auf W_2, da W_1 und W_2 Teilmengen von $W_1 + W_2$ sind.

Es gilt auch $W_1^0 \cap W_2^0 \subset (W_1 + W_2)^0$. Denn eine Linearform, die sowohl auf W_1 als auch auf W_2 verschwindet, verschwindet auch auf der Summe $W_1 + W_2$, da die Verschwindemenge einer Linearform stets ein Vektorraum ist.

(ii) Eine Linearform, die auf W_i verschwindet, verschwindet auch auf einer Teilmenge von W_i. Damit gilt $W_1^0, W_2^0 \subset (W_1 \cap W_2)^0$ und damit auch $W_1^0 + W_2^0 \subset (W_1 \cap W_2)^0$, da der Annullator ein Vektorraum ist.

(iii) Wenn $\dim(V) < \infty$, dann gilt für jeden Unterraum $W \subset V$, dass $W = W^{00}$, sowie für jeden Unterraum $W' \subset V^*$, dass $W' = (W')^{00}$. Außerdem gilt die Aussage aus der (i) analog auch für Unterräume von V^*. Es gilt daher insbesondere $(W_1^0 + W_2^0) = (W_1^0 + W_2^0)^{00} = ((W_1^0 + W_2^0)^0)^0 = (W_1^{00} \cap W_2^{00})^0 = (W_1 \cap W_2)^0$.

Alternativ reicht es aus zu zeigen, dass die Dimensionen von $W_1^0 + W_2^0$ und $(W_1 \cap W_2)^0$ gleich sind. Es ist

$$\dim(W_1 \cap W_2)^0 = \dim(V) - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Andererseits ist mit der wohlbekannten Dimensionsformel $\dim(A+B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$ für Unterräume A, B auch

$$\begin{aligned}
\dim(W_1^0 + W_2^0) &= \dim(W_1^0) + \dim(W_2^0) - \dim(W_1^0 \cap W_2^0) \\
&= (\dim(V) - \dim(W_1)) + (\dim(V) - \dim(W_2)) - \dim((W_1 + W_2)^0) \\
&= (\dim(V) - \dim(W_1)) + (\dim(V) - \dim(W_2)) - (\dim(V) - \dim(W_1 + W_2)) \\
&= \dim(V) - \dim(W_1 \cap W_2).
\end{aligned}$$