Übungsblatt 8

Hausübungen

Die Hausübungen müssen bis **Dienstag, den 12.06.18, um 12:00 Uhr** in den Briefkasten "Lineare Algebra II" mit Ihrer Übungsgruppennummer im Mathematischen Institut, Raum 301 abgegeben werden.

H23 (10 Punkte): Wir betrachten den $\mathbb{R}^3$ mit der Bilinearform $\beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\beta((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) := -2x_1y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$.

(i) Stellen Sie die Gram-Matrix von β bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ auf.

(ii) Zeigen Sie, dass β nicht ausgeartet ist.

(iii) Gibt es Vektoren $v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq 0$, sodass $\beta(v, v) = 0$?

(iv) Finden Sie eine Basis von $\mathbb{R}^3$, sodass die Gram-Matrix von β bezüglich der neuen Basis Diagonalform hat.

Lösungsskizze. (i) Die Gram-Matrix ist

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Die Matrix B ist invertierbar, die Spalten sind offensichtlich linear unabhängig. Damit ist die Bilinearform nicht ausgeartet.

(iii) Zum Beispiel ist $\beta((0, 1, 0), (0, 1, 0)) = 0$.

(iv) Wir können zum Beispiel die Basis $(e_1, e_2 + e_3, e_2 - e_3)$ betrachten, mit den Standardbasisvektoren e_1, e_2, e_3. Bezüglich dieser Basis hat β die Gram-Matrix

$$B' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

H24 (10 Punkte): Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\beta : V \times V \to K$ eine nicht-ausgeartete Bilinearform. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen für einen Endomorphismus $f : V \to V$ äquivalent sind:

(i) f ist eine Isometrie bzgl. β, d.h. $\beta(f(x), f(y)) = \beta(x, y)$ für alle $x, y \in V$.

(ii) f ist invertierbar und $f^{-1} = f^*$, wobei f^* den bzgl. β zu f adjungierten Endomorphismus bezeichnet. Insbesondere gilt $f^{**} = f$.

(iii) Ist $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V, B die Gram-Matrix von β und A die Darstellungsmatrix von f bzgl. der gewählten Basis, so gilt $B = A^T BA$.

Lösungsskizze. Angenommen es gilt (ii). Dann ist $\beta(f(x), f(y)) = \beta(x, f^*(f(y))) = \beta(x, f^{-1}(f(y))) = \beta(x, y)$ und es folgt (i). Gilt umgekehrt (i), dann ist $\beta(x, y) = \beta(f(x), f(y)) = \beta(x, f^*(f(y)))$ für alle $x, y \in V$. Daraus folgt $0 = \beta(x, f^*(f(y)) - y)$ für alle $x, y \in V$. Aus der Nichtausgeartetheit der Bilinearform folgt daraus $f^*(f(y)) = y$ für alle $y \in V$ und damit $f^* \circ f = \mathrm{id}$. Aus der Endlichdimensionalität des Vektorraums folgt daraus schon, dass f invertierbar ist und $f^{-1} = f^*$.
Der Zusatz in (ii) folgt daraus, dass mit f auch f^{-1} eine Isometrie ist. Es gilt daher $f^{**} = (f^*)^* = (f^{-1})^* = (f^{-1})^{-1} = f$.
Die Aussage (iii) ist zu (i) äquivalent, denn die (iii) ist einfach die Koordinatenversion der Aussage (i): Wenn v_B, w_B die Koordinatenvektoren von Elementen $v, w \in V$ sind, dann ist

$$v_B^T B w_B = \beta(v, w) = \beta(f(v), f(w)) = (Av_B)^T B(Aw_B) = v_B^T (A^T BA) w_B$$

äquivalent zu

$$B = A^T BA.$$

H25 (10 Punkte): Seien V und W beides K-Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei weiter $U \subset V$ ein Unterraum mit $U \subset \mathrm{Kern}(f)$. Wir erinnern an die Definition des Faktorraums V/U aus Gruppenübung 6.

(i) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \overline{f} : V/U &\to W \\ v + U &\mapsto f(v) \end{aligned}$$

wohldefiniert und linear ist, und dass $f = \overline{f} \circ \pi$ gilt, wobei $\pi : V \to V/U$ die kanonische Projektion bezeichne (siehe Gruppenübung 6). Wir sagen auch, dass f über V/U *faktorisiert*.

Zeigen Sie auch, dass $\overline{f}$ eindeutig durch die Gleichung $f = \overline{f} \circ \pi$ bestimmt ist und dass $\mathrm{Kern}(\overline{f}) = \mathrm{Kern}(f)/U = \pi(\mathrm{Kern}(f))$.

(ii) Sei g ein Endomorphismus von V und $U \subset V$ ein g-invarianter Unterraum, d.h. $g(U) \subset U$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} g' : V/U &\to V/U \\ v + U &\mapsto g(v) + U \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Endomorphismus von V/U ist und dass die folgende Gleichung für die charakteristischen Polynome gilt (für $\dim(V) < \infty$):

$$P_g = P_{g|_U} \cdot P_{g'}.$$

(Hinweis: Stellen Sie die Abbildungsmatrix von g bzgl. einer speziellen Basis auf. Fangen Sie mit einer Basis $(u_1, \ldots, u_k)$ von U an und ergänzen Sie diese mit Vektoren $(u_{k+1}, \ldots, u_l)$ zu einer Basis von V. Zeigen Sie, dass dann $\pi(u_{k+1}), \ldots, \pi(u_l)$ eine Basis von V/U ist.)

Bonus (5 Punkte): Zeigen Sie, dass für einen Unterraum $X \subset V$ gilt, dass $X^0 \cong (V/X)^*$, wobei hier kanonische Isomorphie vorliegt.

Lösungsskizze. (i) Die Abbildung $\overline{f}$ ist wohldefiniert, da $\overline{f}((v+u)+U) := f(v+u) = f(v)+f(u) = f(v) =: \overline{f}(v+U)$ für $u \in U \subset \operatorname{Kern}(f)$. Nach Konstruktion ist $f = \overline{f} \circ \pi$. Die Linearität folgt aus der Linearität von f. Die Abbildung $\overline{f}$ ist auch eindeutig dadurch bestimmt, dass $f = \overline{f} \circ \pi$, da π surjektiv ist. Es gilt $\operatorname{Kern}(\overline{f}) = \operatorname{Kern}(f)/U = \pi(\operatorname{Kern}(f))$, da $0 = \overline{f}(v+U) = f(v)$ äquivalent zu $v \in \operatorname{Kern}(f)$ ist, also äquivalent zu $v + U \in \operatorname{Kern}(f)/U$ ist.

(ii) Die Wohldefiniertheit ist einfach nachzurechnen. Wir können dazu auch die Aufgabe (i) benutzen: Wir verknüpfen zuerst die Abbildung g mit der kanonischen Projektion auf V/U, wir bilden also $\pi \circ g : V \to V/U$. Es gilt nun $U \subset \operatorname{Kern}(\pi \circ g)$, da $g(U) \subset U$ und $U = \operatorname{Kern}(\pi)$. Die Abbildung $\pi \circ g$ faktorisiert daher über V/U und wir erhalten die gewünschte Abbildung g'. Es gilt $\pi \circ g = g' \circ \pi$.

Die Aussage über die charakteristischen Polynome folgt, indem wir die Abbildungsmatrix von g bezüglich einer Basis von V bilden, die aus einer Basis $(u_1, \ldots, u_k)$ von U besteht, die man mit Vektoren $(u_{k+1}, \ldots, u_l)$ zu einer Basis von V ergänzt. Die Abbildungsmatrix hat dann obere Dreiecksblockform. Der obere linke Block ist Abbildungsmatrix von $g|_U$ bezgl. der Basis $(u_1, \ldots, u_k)$ und es ist auch einfach nachzurechnen, dass man den unteren rechten Block als Abbildungsmatrix von g' auffassen kann (bezüglich der Basis $(\pi(u_{k+1}), \ldots, \pi(u_l))$). Die Aussage folgt dann aus der Multiplikativität der charakteristischen Polynome für Matrizen in oberer Dreiecksblockform.

Bonus: Für Linearformen f in X^0 gilt, dass diese auf X verschwinden. Daher faktorisiert eine solche Abbildung über V/X, d.h. es gibt eine eindeutige Linearform $\overline{f}$, sodass $f = \overline{f} \circ \pi$. Der gesuchte Isomorphismus ist dann $X^0 \to (V/X)^*$, $f \mapsto \overline{f}$. Die Umkehrabbildung ist offensichtlich $(V/X)^* \to X^0$, $g \mapsto g \circ \pi$.