Übungsblatt 9

Hausübungen

Die Hausübungen müssen bis **Dienstag, den 19.06.18, um 12:00 Uhr** in den Briefkasten "Lineare Algebra II" mit Ihrer Übungsgruppennummer im Mathematischen Institut, Raum 301 abgegeben werden.

H26 (10 Punkte): Sei V ein K-Vektorraum und $\beta : V \times V \to K$ eine Bilinearform auf V. Sei weiter B eine Basis von V und G die Gram-Matrix von β bezüglich B.

(i) Zeigen Sie, dass β genau dann symmetrisch ist, d.h. $\beta(x, y) = \beta(y, x)$ für alle $x, y \in V$, wenn $G = G^T$.

(ii) Zeigen Sie, dass β genau dann schiefsymmetrisch ist, d.h. $\beta(x, y) = -\beta(y, x)$ für alle $x, y \in V$, wenn $G = -G^T$.

Lösungsskizze. (i) Sind x_B, y_B die Koordinatenvektoren von x, y bezüglich B, dann bedeutet die Symmetrie von β genau $x_B^T G y_B = y_B^T G x_B$. Andererseits gilt für 1×1-Matrizen (a), dass $(a)^T = (a)$, also auch $(x_B^T G y_B) = (x_B^T G y_B)^T = y_B^T G^T x_B$. Daraus folgt die Aussage.

(ii) Analog zu (i).

H27 (10 Punkte):

(i) Wir betrachten den n-dimensionalen reellen Vektorraum P_n der reellen Polynomfunktionen vom Grad kleiner n auf dem Einheitsintervall,

$$P_n := \{p : [0, 1] \to \mathbb{R} \mid p \text{ Polynomfunktion, } \operatorname{grad}(p) < n\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\langle p_1, p_2 \rangle := \int_0^1 p_1(x) p_2(x) \, \mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt auf P_n definiert. Ist die Standardbasis $(1, x, x^2, \ldots, x^{n-1})$ eine Orthonormalbasis?

(ii) Auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^{n \times n}$ der reellen $n \times n$-Matrizen definieren wir

$$\langle A, B \rangle := \operatorname{Spur}(B^T A).$$

Zeigen Sie, dass dadurch ein Skalarprodukt definiert wird.

Lösungsskizze. (i) Da das Integral eine Linearform auf dem Raum der stetigen reellen Funktionen auf dem Einheitsintervall darstellt und das Produkt zweier solcher Funktionen bilinear ist, ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Bilinearform. Sie ist offensichtlich symmetrisch. Die positive Definitheit folgt daraus, dass das Integral für stetige positive Funktionen, die an wenigstens einer Stelle echt positiv sind, echt positiv ist. Das Quadrat einer Polynomfunktion ist positiv und genau dann die Nullfunktion, wenn die Polynomfunktion schon die Nullfunktion war.

Die Standardbasis ist keine Orthonormalbasis, z.B. stehen x und 1 nicht senkrecht aufeinander, $\langle 1, x\rangle = \frac{1}{2}$.

(ii) Die Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle$ stimmt mit dem Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^{n^2}$ überein, wenn man den Raum der $n \times n$-Matrizen bezgl. der Standardbasis (E_{ij}) (dabei bezeichne E_{ij} diejenige Matrix, die genau eine Eins an der Stelle (i,j) hat und sonst nur Nullen) mit dem $\mathbb{R}^{n^2}$ identifiziert. Gilt nämlich $A = (a_{ij}) = \sum_{i,j} a_{ij}E_{ij}$ und $B = (b_{ij}) = \sum_{i,j} b_{ij}E_{ij}$, dann ist $\mathrm{Spur}(B^TA) = \sum_{i,j} a_{ij}b_{ij}$, wie man leicht ausrechnet. Der j-te Diagonaleintrag von B^TA ist nämlich $\sum_i b_{ij}a_{ij}$.

H28 (10 Punkte): Sei V ein reeller Vektorraum und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf V.
Zeigen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle,$$

für alle $x, y \in V$. Zeigen Sie auch, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn x und y linear abhängig sind.
(Hinweis: Nutzen Sie $\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \geq 0$ für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$ aus.)

Lösungsskizze. Der Fall $x = y = 0$ ist trivial. Da die Aussage symmetrisch in x und y ist, dürfen wir oBdA annehmen, dass $y \neq 0$. Dann ist auch $\langle y, y\rangle > 0$. Multiplizieren wir in der Ungleichung im Hinweis aus, so erhalten wir die Ungleichung

$$\langle x, x\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle \geq 0.$$

Auf der linken Seite der Ungleichung steht ein quadratisches reelles Polynom in λ, das nur positive Werte annimmt.
Setzen wir jetzt $\lambda = -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$, so erhalten wir $\langle x, x\rangle - \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle} \geq 0$. Daraus folgt die Ungleichung. Gleichheit gilt offenbar genau dann, wenn $\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = 0$ mit unserer speziellen Wahl für λ. Das ist wiederum äquivalent zu $x + \lambda y = 0$ und damit zur linearen Abhängigkeit.
Bemerkung: Die Ungleichung ist auch richtig für nur positiv semidefinite symmetrische Bilinearformen (ohne den Zusatz über die Gleichheit). Ist nämlich $\langle x, x\rangle$ oder $\langle y, y\rangle \neq 0$, so kann man wie eben schließen. Gilt $\langle x, x\rangle = \langle y, y\rangle = 0$, so folgt wie eben $2\lambda\langle x, y\rangle \geq 0$ für beliebige λ. Daraus folgt dann $\langle x, y\rangle = 0$.