Gruppenübungen

Die Gruppenübungen sind zum gemeinsamen Bearbeiten während der Übungsgruppen (in der Woche vom 16.4.) gedacht. Sie müssen nicht abgegeben werden und werden nicht bewertet.

Aufgabe 1 Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -\sqrt[11]{\pi} & e^{-i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösungsskizze. Die Determinante ist 2.

Aufgabe 2 Sei der Untervektorraum $V := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ von $\mathbb{R}^3$ gegeben. Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to V$ mit

$$f(v) := v - \frac{1}{3}(1,1,1)^T(1,1,1)v.$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $\mathcal{M}_B^S(f)$ bezüglich der Standardbasis $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ und der Basis $B = \{(1,-1,0)^T, (0,1,-1)^T\}$ von V.
Führen Sie mit der Transformationsformel einen Basiswechsel für die Abbildungsmatrix durch, wir betrachten als neue Basen $S' = \{(1,1,1)^T, (1,-1,0)^T, (0,1,-1)^T\}$ von $\mathbb{R}^3$ und $B' = \{(1,-1,0)^T, (0,-1,1)^T\}$ von V.

Lösungsskizze. Die Abbildungsmatrix ist

$$\mathcal{M}_B^S(f) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Für die transformierte Abbildungsmatrix erhält man

$$\mathcal{M}_{B'}^{S'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -17 & -33 \\ 1 & -6 & -11 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Lösungsskizze. Das *charakteristische Polynom* P_A ist $P_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$ mit den Nullstellen $1, 2, 3$, damit hat man die Eigenwerte gefunden.

Aufgabe 4 Bestimmen Sie die Eigenwerte der reellen Matrix

$$A_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $\phi \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$B_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $\phi \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Lösungsskizze. Es gilt $P_{A_\phi} = X^2 - 2\cos(\phi)X + 1$. Dieses Polynom hat nur für $\phi = 2\pi k$ (in diesem Fall ist $A_{2\pi k}$ die Einheitsmatrix mit dem zweifachen Eigenwert 1) und $\phi = \pi + 2\pi k$ (in diesem Fall ist $A_{\pi+2\pi k} = -E$ mit dem zweifachen Eigenwert -1) reelle Nullstellen. Nur in diesen Fällen gibt es also Eigenwerte. Eine Drehung um einen Winkel hat nur für die Vollwinkel und die halben Vollwinkel (Spiegelung am Ursprung) Eigenwerte.
Es gilt $P_{B_\phi} = X^2 - 1$ mit den Nullstellen $-1, 1$. Damit hat man die Eigenwerte gefunden. Diese Matrizen beschreiben die Spiegelungen an Ursprungsgeraden.
Die Matrix C hat die Eigenwerte $0, 1$. Sie beschreibt die orthogonale Projektion auf die erste Winkelhalbierende.