Gruppenübungen 10

Die Gruppenübungen sind zum gemeinsamen Bearbeiten während der Übungsgruppen (in der Woche vom 25.6.) gedacht. Sie müssen nicht abgegeben werden und werden nicht bewertet.

Aufgabe 1: Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und f ein Endomorphismus, der orthogonal bzw. unitär ist. Man zeige:

(i) $\|f(v)\|_2 = \|v\|_2$.

(ii) $v \perp w \Rightarrow f(v) \perp f(w)$.

(iii) f ist Isomorphismus und f^{-1} ist auch orthogonal bzw. unitär.

(iv) Alle Eigenwerte von f haben Betrag 1.

(v) Frage: Sind orthogonale Endomorphismen stets diagonalisierbar?

Lösungsskizze. (i) Orthogonale bzw. unitäre Abbildungen erhalten per Definition das Skalarprodukt, also auch die euklidische Norm.

(ii) Das ist klar, da Skalarprodukte erhalten werden.

(iii) Das f Isomorphismus ist, ist schon bekannt ($f^{-1} = f^*$). Weiter gilt $\langle f^{-1}(x), f^{-1}(y)\rangle = \langle f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y))\rangle = \langle x, y\rangle$.

(iv) Für normale Endomorphismen gilt allgemein, dass diese dieselben Eigenräume wie ihre Adjungierten besitzen, die dazugehörigen Eigenwerte sind die komplex konjugierten. Andererseits gilt für invertierbare Endomorphismen, dass diese dieselben Eigenräume wie ihre Inversen besitzen, die Eigenwerte sind die Inversen. Nimmt man hier beides zusammen, so erhält man die Aussage.

Noch einfacher schließt man so: Ist x ein Eigenvektor, dann gilt mit (i), dass $\|x\|_2 = \|f(x)\|_2 = \|\lambda x\|_2 = |\lambda|\|x\|_2$. Daraus folgt die Aussage.

(v) Das ist falsch, im Allgemeinen haben orthogonale Abbildungen komplexe Eigenwerte, sind also reell nicht diagonalisierbar (aber stets komplex). Beispiele sind reelle zweidimensionale Drehmatrizen.