Gruppenübungen 2

Die Gruppenübungen sind zum gemeinsamen Bearbeiten während der Übungsgruppen (in der Woche vom 23.4.) gedacht. Sie müssen nicht abgegeben werden und werden nicht bewertet.

Aufgabe 1: Sei $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix über einem Körper K.
Zeigen Sie mithilfe der Leibniz-Formel für die Determinante, dass das charakteristische Polynom $P_A(X) = \det(XE - A)$ ein normiertes[1] Polynom n-ten Grades ist.

Lösungsskizze. Berechnet man $\det(XE - A)$ mithilfe der Leibnizformel, so erhält man eine Summe von Produkten von je einem Eintrag pro Spalte mit Vorzeichen. Man erhält ein Polynom n-ten Grades in X. Das Produkt der Diagonaleinträge liefert das Monom X^n (plus Monome kleineren Grades). In der Leibnizformel korrespondiert das Produkt der Diagonaleinträge zur identischen Permutation, die mit Vorzeichen $+$ auftritt. Die Produkte von Spalteneinträgen zu anderen Permutationen liefern nur kleinere X-Monome.

Aufgabe 2: Das charakteristische Polynom P_f eines Endomorphismus $f : V \to V$, V endlichdimensionaler Vektorraum, ist definiert als das charakteristische Polynom P_A einer Darstellungsmatrix A von f zu einer beliebigen Basis von V.
Zeigen Sie, dass diese Definition sinnvoll ist, also nicht von der Wahl einer Basis von V abhängt.

Lösungsskizze. Es gilt

$$\det(XE - S^{-1}AS) = \det(XS^{-1}S - S^{-1}AS) = \det(S^{-1}(XE - A)S) = \det(XE - A).$$

Das charakteristische Polynom einer Matrix A ist also invariant unter Basistransformationen $S^{-1}AS$.

[1] Ein Polynom $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ heißt normiert, wenn $a_n = 1$.