Gruppenübungen 3

Die Gruppenübungen sind zum gemeinsamen Bearbeiten während der Übungsgruppen (in der Woche vom 30.4.) gedacht. Sie müssen nicht abgegeben werden und werden nicht bewertet.

Aufgabe 1:

(i) Sei $\mathbb{C}_n[x]$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ und f die lineare Abbildung die einem Polynom P die Ableitung P' zuordnet. Bestimmen Sie die zugehörigen Haupträume.

(ii) Sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$
Berechnen Sie die Eigenwerte von A und bestimmen Sie die zugehörigen Haupträume.

Lösungsskizze. (i) Die Abbildung f ist nilpotent denn sie erfüllt $f^{n+1} = 0$. Daraus folgt, dass der einzige Eigenwert 0 ist. Die verallgemeinerten Eigenräume $\mathrm{Eig}_r(f,0) = \mathrm{Kern}(f^r)$ sind genau die Räume der Polynome vom Grad $< r$. Das erste i, für das gilt, dass $\mathrm{Eig}_i(f,0)$ mit $\mathrm{Eig}_{i+1}(f,0)$ übereinstimmt ist $i = n+1$. Somit ist der Hauptraum zum Eigenwert 0 gleich $\mathrm{Eig}_{n+1}(f,0) = \mathbb{C}_n[x]$.

(ii) Es ist $P_A(x) = (x-1)^2(x-2)$, d.h. die Eigenwerte sind 1 und 2.

Wir bestimmen zunächst den Hauptraum $\mathrm{Hau}(A,1)$ zum Eigenwert 1. Also berechnen wir für $r = 1, 2, \ldots$ die verallgemeinerten Eigenräume $\mathrm{Eig}_r(A,1)$ bis zwei von ihnen übereinstimmen. Es ist

$$\mathrm{Eig}_1(A,1) = \mathrm{Kern}(E-A) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

$$\mathrm{Eig}_2(A,1) = \mathrm{Kern}(E-A)^2 = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

$$\mathrm{Eig}_3(A,1) = \mathrm{Kern}(E-A)^3 = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Genauso für den Eigenwert 2. Hier ist (bzw. kann man das auch schon daraus folgern, dass die Dimension des Hauptraums hier durch 1 beschränkt ist)

$$\mathrm{Eig}_1(A,2) = \mathrm{Kern}(2E-A) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

$$\mathrm{Eig}_2(A,2) = \mathrm{Kern}(2E-A)^2 = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 4 & -8 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Aus der Vorlesung ist auch bekannt, dass in jedem Fall $\mathrm{Hau}(A,\lambda) = \mathrm{Eig}_{m_\lambda}(A,\lambda)$, wenn m_λ die algebraische Vielfachheit von λ ist und $\dim \mathrm{Hau}(A,\lambda) = m_\lambda$.