Gruppenübungen 4

Die Gruppenübungen sind zum gemeinsamen Bearbeiten während der Übungsgruppen (in der Woche vom 7.5.) gedacht. Sie müssen nicht abgegeben werden und werden nicht bewertet.

Aufgabe 1: Beweisen Sie Korollar 6.21 aus der Vorlesung: Sei $A \in K^{n\times n}$. Das charakteristische Polynom $P_A \in K[X]$ zerfalle in Linearfaktoren

$$P_A(X) = (X-\lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (X-\lambda_k)^{m_k},$$

wobei $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Dann existiert eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$, so dass

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_k \end{pmatrix},$$

wobei die Blöcke $C_i \in K^{m_i \times m_i}$ obere Dreiecksmatrizen der folgenden Gestalt sind:

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & * & * \\ & \ddots & * \\ & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Lösungsskizze. Mit Satz 6.13 zerlegen wir den Vektorraum K^n in die Haupträume: $K^n = \mathrm{Hau}(A,\lambda_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Hau}(A,\lambda_k)$. Diese sind unter A invariant und haben Dimensionen m_i. Wählen wir uns also in jedem Hauptraum eine Basis, so hat die Matrix A nach einer entsprechenden Basistransformation eine Blockdiagonalform $\mathrm{diag}(C_1', C_2', \ldots, C_k')$ mit Blöcken C_i' der Größe $m_i \times m_i$. Die charakteristischen Polynome dieser Blöcke sind ebenfalls nach Satz 6.13 die entsprechenden Linearfaktoren mit Vielfachheiten m_i: $P_{C_i'} = (X-\lambda_i)^{m_i}$. Man kann nun in den einzelnen Blöcken eine Trigonalisierung durchführen, um die Blöcke C_i' auf die gewünschte Form einer oberen Dreiecksmatrix zu bringen.