Gruppenübungen 5

Die Gruppenübungen sind zum gemeinsamen Bearbeiten während der Übungsgruppen (in der Woche vom 14.5.) gedacht. Sie müssen nicht abgegeben werden und werden nicht bewertet.

Aufgabe 1: Wir nennen zwei Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ *ähnlich*, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in K^{n\times n}$ gibt, mit $S^{-1}AS = B$. Zwei Matrizen sind also ähnlich, wenn sie zueinander konjugiert sind.

(i) Zeigen Sie, dass der Ähnlichkeitsbegriff eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $K^{n\times n}$ definiert. D.h. es gilt stets $A \sim A$ (Reflexivität), aus $A \sim B$ folgt stets $B \sim A$ (Symmetrie) und aus $A \sim B$, $B \sim C$ folgt $A \sim C$ (Transitivität).

(ii) Die Äquivalenzklassen bzgl. der Ähnlichkeitsrelation zerlegen die Menge der Matrizen. Zeigen Sie, dass in der Äquivalenzklasse einer Matrix A, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, eine Matrix in Jordannormalform liegt und sich zwei Matrizen in Jordannormalform, die in der selben Äquivalenzklasse liegen, nur in der Reihenfolge der Jordanblöcke unterscheiden.

Insbesondere bilden die Matrizen in Jordannormalform ein vollständiges (und bis auf die Reihenfolge der Blöcke minimales) Vertretersystem der Ähnlichkeitsklassen, wenn alle Polynome über K in Linearfaktoren zerfallen.

Lösungsskizze. (i) Das ist einfach nachzurechnen. Es ist $A \sim A$, da $E^{-1}AE = A$. Außerdem, wenn $A \sim B$ also $S^{-1}AS = B$, dann $SBS^{-1} = (S^{-1})^{-1}BS^{-1} = A$. Zuletzt: Aus $S^{-1}BS = C$ und $(S')^{-1}AS' = B$ folgt $S^{-1}((S')^{-1}AS')S = (S'S)^{-1}A(S'S) = C$.

(ii) Das ist eine Umformulierung der bekannten Sätze aus der Vorlesung über die Existenz und Eindeutigkeit der Jordannormalform zu einer Matrix.