Gruppenübungen 6

Die Gruppenübungen sind zum gemeinsamen Bearbeiten während der Übungsgruppen (in der Woche vom 28.5.) gedacht. Sie müssen nicht abgegeben werden und werden nicht bewertet.

Aufgabe 1: Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $U \subset V$ ein Unterraum von V. Wir definieren auf V eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in U.$$

Sei V/U die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$. Wir benutzen die Notation $v + U := \{v + u \mid u \in U\}$ für die Äquivalenzklasse in V/U, die v enthält. Die Menge V/U wird zu einem K-Vektorraum, indem wir die Addition

$$(v_1 + U) + (v_2 + U) := (v_1 + v_2 + U), \quad v_1, v_2 \in V$$

und die Skalarmultiplikation

$$\lambda(v + U) := (\lambda v + U), \quad v \in V,\ \lambda \in K$$

definieren. Man nennt V/U den *Faktorvektorraum* von V nach U.

(i) Zeigen Sie, dass die Addition und Skalarmultiplikation auf V/U wohldefiniert sind und V/U zu einem K-Vektorraum machen.

(ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\pi : V \to V/U$ mit $v \mapsto (v + U)$ ein surjektiver Vektorraumhomomorphismus ist mit $\mathrm{Kern}(\pi) = U$. Diese wird auch als kanonische Projektion bezeichnet.

(iii) Zeigen Sie die Dimensionsformel $\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U)$.

Lösungsskizze. (i) Nur die Wohldefiniertheit ist zu zeigen, die Rechenregeln vererben sich von der Vektorraumstruktur auf V. Man muss die Unabhängigkeit der Definitionen von konkreten Repräsentanten der Äquivalenzklassen zeigen. Mit einem Repräsentanten v der Äquivalenzklasse $v + U$ sind auch alle $v + u$ mit $u \in U$ Repräsentanten dieser Klasse. Es gilt nun z.B. für die Addition, dass $((v + u) + U) + ((w + u') + U) := ((v + w + u + u') + U)$ und $(v + w + u + u') + U = v + w + \tilde{u} + U = v + w + U =: (v + U) + (w + U)$. Damit ist die Unabhängigkeit der Addition von konkreten Repräsentanten der Äquivalenzklassen nachgewiesen und die Wohldefiniertheit der Addition gezeigt. Für die Definition der Skalarmultiplikation geht man analog vor.

(ii) Die Aussagen folgen direkt aus den Definitionen. Die Abbildung ist linear nach Definition der Rechenoperationen auf V/U, surjektiv, da jede Äquivalenzklasse Repräsentanten hat, und der Kern ist U, da die Null in V/U gleich $0 + U = U$ ist und π genau die Repräsentanten auf ihre Äquivalenzklassen abbildet.

(iii) Das folgt aus der Dimensionsformel für lineare Abbildungen ($\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \mathrm{rang}(f)$) angewendet auf die Abbildung π.