Gruppenübungen 7

Die Gruppenübungen sind zum gemeinsamen Bearbeiten während der Übungsgruppen (in der Woche vom 04.6.) gedacht. Sie müssen nicht abgegeben werden und werden nicht bewertet.

Aufgabe 1: Sei K ein Körper der Charakteristik ungleich 2 (das heißt $1+1 \neq 0$ in K) und $V = K^{2\times 2}$ der Vektorraum der 2×2-Matrizen über K. Betrachten Sie die Abbildung

$$\beta\colon V \times V \to K, \qquad \beta(A,B) := \mathrm{Spur}(AB).$$

(i) Zeigen Sie, dass β eine symmetrische Bilinearform ist und bestimmen Sie die Strukturmatrix von β bezüglich der Basis

$$B := \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Anmerkung: In Charakteristik 2 wäre dies keine Basis.

(ii) Betrachten Sie die Einschränkung von β auf den Raum der 2×2-Matrizen mit Spur 0. Geben Sie eine Strukturmatrix dieser Einschränkung bezüglich einer geeigneten Basis an.

Lösungsskizze. (i) Da stets $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$ für quadratische Matrizen (nachrechnen!), ist die Abbildung β symmetrisch. Sie ist eine Bilinearform, da die Multiplikation von Matrizen bilinear ist und die Spurabbildung linear ist.

Die Gram-Matrix von β bezüglich der Basis B ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Die ersten drei Elemente von B bilden eine Basis des Raums der Spur $= 0$ Matrizen. Damit erhält man eine Gram-Matrix der Einschränkung von β bzgl. dieser Basis als oberen linken 3×3-Minor der angegebenen Gram-Matrix von β:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$