Gruppenübungen 8

Die Gruppenübungen sind zum gemeinsamen Bearbeiten während der Übungsgruppen (in der Woche vom 11.6.) gedacht. Sie müssen nicht abgegeben werden und werden nicht bewertet.

Aufgabe 1: Sei V ein euklidischer Vektorraum. Auf diesem können wir die euklidische Norm $\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ definieren. Für diese gilt die Dreiecksungleichung: $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$. Weiter definieren wir die Abstandsfunktion $d(x, y) := \|x - y\|_2$.
Sind folgende Aussagen richtig? Wenn nicht, überlegen Sie sich ein Gegenbeispiel.

(i) $d(x, x) > 0$

(ii) $d(x, x) = 0$

(iii) $d(x, y) > 0$ für alle $x \neq y$

(iv) $d(\lambda x, y) = \lambda d(x, y)$

(v) $d(x, y) = d(y, x)$

(vi) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

(vii) $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$

Lösungsskizze. (i) falsch, siehe (ii)

(ii) richtig

(iii) richtig

(iv) falsch, wähle z.B. $\lambda = 0$ und $y \neq 0$

(v) richtig

(vi) richtig, das folgt aus der Dreiecksungleichung, die wiederum aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

(vii) falsch, wähle z.B. $z = x$ und $y \neq x$

Bemerkung: (iv) und (vii) sind richtig, wenn V der Nullvektorraum ist.

Aufgabe 2: Sei V ein Vektorraum und $U, W \subset V$ Unterräume mit $U + W = V$. Zur Erinnerung: Die Summe $U + W$ von Unterräumen ist definiert als die Menge

$$U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

der Summen von Elementen aus diesen Unterräumen und stimmt mit dem von den Unterräumen erzeugten Vektorraum überein, $U + W = \mathrm{Lin}(U \cup W)$.
Die Summe heißt direkt, geschrieben $U + W = U \oplus W$, wenn gilt, dass $U \cap W = \{0\}$. Zeigen Sie, dass die Direktheit der Summe äquivalent zu jeder der folgenden Bedingungen ist (für (iii) nehmen wir $\dim(V) < \infty$ an):

(i) Gilt $u + w = 0$ mit $u \in U, w \in W$, dann folgt schon $u = w = 0$.

(ii) Für $v \in V$ ist die Summenzerlegung $v = u + w$, $u \in U, w \in W$ eindeutig.

(iii) $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$.

Lösungsskizze. (i) und (ii) sind äquivalent, da (ii) sicher (i) impliziert und umgekehrt aus (i) auch (ii) folgt, da für $u + w = u' + w'$ gilt, dass $(u - u') + (w - w') = 0$ und damit $u = u'$, $w = w'$ nach (i). Bedingung (i) ist äquivalent zur Direktheit der Summe: Angenommen es gelte $U \cap W = \{0\}$, dann folgt aus $u + w = 0$, also $u = -w$, dass $u \in U \cap W = \{0\}$ und damit $u = w = 0$. Gilt umgekehrt (i), dann kann man für $x \in U \cap W$ schreiben $x + (-x) = 0$ und aus (i) folgt dann $x = 0$ und damit $U \cap W = \{0\}$.
Die Bedingung (iii) ist äquivalent zur Direktheit der Summe, da die Dimensionsformel $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$ für beliebige Unterräume gilt.