Gruppenübungen 9

Die Gruppenübungen sind zum gemeinsamen Bearbeiten während der Übungsgruppen (in der Woche vom 18.6.) gedacht. Sie müssen nicht abgegeben werden und werden nicht bewertet.

Aufgabe 1: Sei V ein euklidischer Vektorraum. Wir definieren den Winkel $\measuredangle(x, y)$ zwischen zwei Vektoren $0 \neq x, y \in V$ als die eindeutig bestimme Zahl $0 \leq \phi \leq \pi$, sodass

$$\cos\phi = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|_2\|y\|_2}$$

mit der euklidischen Norm $\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

(i) Zeigen Sie, dass dies wohldefiniert ist.

(ii) Zeigen Sie dann den Kosinussatz:

$$\|x - y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - 2\|x\|_2\|y\|_2 \cos\phi$$

mit dem Winkel ϕ zwischen x und y.

(iii) Berechnen Sie den Winkel zwischen der konstanten Funktion 1 und der Identität x auf dem Einheitsintervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, wobei der euklidische Vektorraum der Raum der Polynomfunktionen auf dem Einheitsintervall vom Grad kleiner 2 sein soll, mit dem Skalarprodukt $\langle p, q\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$.

Lösungsskizze. (i) Es ist nur zu zeigen, dass $\left|\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|_2\|y\|_2}\right| \leq 1$. Das folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

(ii) Das kann man sofort nachrechnen.

(iii) Es ist $\|1\|_2 = 1$ und $\|x\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Außerdem ist $\langle 1, x\rangle = \frac{1}{2}$. Damit berechnet sich der Winkel ϕ zwischen 1 und x zu $\phi = \frac{\pi}{6}$.