# Lineare Algebra II
# Zwischentest

Dr. Stephan Ehlen, Dr. Chris Jennings-Shaffer, Jonathan Schürr

14.06.18

- Dieser Zwischentest besteht aus 7 Aufgaben und enthält insgesamt 12 Seiten. Sie haben für die Bearbeitung der Aufgaben 180 Minuten Zeit und es gibt insgesamt 72 zu erreichende Punkte. Der Zwischentest gilt mit 36 erreichten Punkten als bestanden.
- Bitte benutzen Sie zur Bearbeitung der Aufgaben Vorder- und Rückseite der Blätter. Geben Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an. Bei Bedarf werden zusätzliche Blätter bereitgestellt.
- Als Hilfsmittel sind zwei handbeschriebene DIN-A4-Blätter erlaubt, sowie Stifte mit schwarzer oder blauer Tinte.
- Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen und führen Sie Berechnungen explizit aus. Sie können Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungsblättern verwenden, ohne diese nochmals zu beweisen, sofern nicht genau dieses gefordert ist. Schreiben Sie deutlich und leserlich.
- Es werden nur Fragen zum Verständnis des Aufgabentextes beantwortet.

---

Nachname, Vorname    Matrikelnummer    **Gruppe**    **Tutor**

| Aufgabe: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Summe | Note |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte: | | | | | | | | | |
| von: | 10 | 10 | 10 | 10 | 12 | 10 | 10 | 72 | |

**Aufgabe 1** (10 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden reellen Matrizen $A$ und $B$ diagonalisierbar sind und berechnen Sie gegebenenfalls explizite Basiswechselmatrizen $S$ und $T$, sodass $S^{-1}AS$ und $T^{-1}BT$ Diagonalgestalt haben.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -3 & -11 & -15 \\ 3 & 10 & 13 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

**Lösung:** Das charakteristische Polynom der Matrix $A$ ist $x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$. Der Eigenraum zum Eigenwert 1 hat aber nur Dimension 1, damit ist die geometrische Vielfachheit dieses Eigenwerts echt kleiner als die algebraische Vielfachheit und damit ist die Matrix $A$ nicht diagonalisierbar.

Die Matrix $B$ hat ebenfalls das charakteristische Polynom $x(x-1)^2$. Hier ist aber die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 1 gleich der algebraischen und damit ist die Matrix diagonalisierbar. Eine Basis aus Eigenvektoren ist z. B. $((-1,-2,2)^T, (-2,1,0)^T, (-3,0,1)^T)$, damit kann man

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

setzen.

**Aufgabe 2** (10 Punkte)

Sei $V$ ein Vektorraum und $f, g \in \operatorname{End}(V)$ Endomorphismen von $V$.

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Sind $f$ und $g$ diagonalisierbar und vertauschbar, d.h. $f \circ g = g \circ f$, so sind auch $f \circ g$ und $f \pm g$ diagonalisierbar.
2. Sind $f$ und $g$ beide nilpotent, so sind auch $f + g$ und $f \circ g$ nilpotent.

**Lösung:** Die Aussage 1 ist richtig. In den Übungen haben wir gesehen, dass $f$ und $g$ unter den gegebenen Voraussetzungen gemeinsam diagonalisiert werden können, d.h. es gibt es eine Basis von $V$ aus gemeinsamen Eigenvektoren zu $f$ und $g$. Diese Basis ist auch eine Basis aus Eigenvektoren für $f \circ g$ und $f \pm g$.

Die zweite Aussage ist so nicht richtig. Es fehlt die Vertauschbarkeit von $f$ und $g$ als Voraussetzung. Gegenbeispiele sind nilpotente Jordanblöcke und deren Transponierte.

**Aufgabe 3** (10 Punkte)

Berechnen Sie die Jordannormalform der folgenden reellen Matrix $A$. Finden Sie auch eine explizite Jordanbasis.

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

**Lösung:** Das charakteristische Polynom von $A$ ist $x^2(x-1)^2$ (obere Dreiecksblockform ausnutzen!). Der Eigenraum $\mathrm{Eig}(A, 0)$ ist eindimensional und hat als Basis z. B. $(-1, 1, 0, 0)^T$. Eine Basis des Hauptraums $\mathrm{Hau}(A, 0)$ ist offenbar $((1, 0, 0, 0)^T, (0, 1, 0, 0)^T)$. Man ergänzt nun $(-1, 1, 0, 0)^T$ z. B. mit $(1, 0, 0, 0)^T$ zu einer Basis des Hauptraums. Dann ist $A(1, 0, 0, 0)^T = (-1, 1, 0, 0)^T$ und $((-1, 1, 0, 0)^T, (1, 0, 0, 0)^T)$ ist ein Teil einer Jordanbasis, welcher den Zweierblock zum Eigenwert 0 liefert.

Auch $\mathrm{Eig}(A, 1)$ ist eindimensional und hat als Basis z.B. $(1, 0, -3, 2)^T$. Eine Basis von $\mathrm{Hau}(A, 1)$ ist z.B. $((-1, 2, 1, 0)^T, (-1, 3, 0, 1)^T)$. Man ergänzt nun $(1, 0, -3, 2)^T$ z. B. mit $(-1, 2, 1, 0)^T$ zu einer Basis des Hauptraums und bildet $(A - E)(-1, 2, 1, 0)^T = (2, 0, -6, 4)^T$. Damit ist $((2, 0, -6, 4)^T, (-1, 2, 1, 0)^T)$ ein Teil einer Jordanbasis, welcher den Zweierblock zum Eigenwert 1 liefert. Insgesamt erhält man

$$\left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

als eine gesuchte Jordanbasis und die Jordannormalform von $A$ ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 4** (10 Punkte)

Es seien $A, B$ zwei $7 \times 7$-Matrizen über einem Körper $K$, welche beide folgende Eigenschaften besitzen:

$$A^5 = B^5 = 0, \quad A^4 \neq 0, B^4 \neq 0, \quad \operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B).$$

Man zeige, dass $A$ und $B$ ähnlich sind, d.h. es existiert ein $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $S^{-1}AS = B$.

**Lösung:** Die beiden Matrizen haben dieselbe Jordannormalform und sind deshalb ähnlich. Aus den ersten beiden Eigenschaften folgt nämlich, dass beide Matrizen nilpotent sind und als größten Jordanblock einen Fünferblock zum Eigenwert Null besitzen. Beide Matrizen können nun jeweils noch entweder einen Zweierblock oder zwei Einerblöcke zum Eigenwert Null besitzen. Die Gesamtanzahl der Jordanblöcke ist durch die Dimension des Kerns gegeben. Da die Ränge gleich sind, sind auch die Dimensionen der Kerne gleich.

**Aufgabe 5** (12 Punkte)
Sei $V$ ein euklidischer Vektorraum mit Skalarpordukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Wir betrachten die Abbildung $\phi_a : V \to V$ mit $\phi_a(x) := x - 2\frac{\langle x,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a$ für ein festes $a \in V$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) (3 Punkte) Die Abbildung $\phi_a$ ist linear.

(b) (3 Punkte) Die Abbildung $\phi_a$ ist zu sich selbst invers, d.h. $\phi_a \circ \phi_a = \mathrm{id}$.

(c) (3 Punkte) Die Abbildung $\phi_a$ ist eine Isometrie, d.h. es gilt $\langle \phi_a(x), \phi_a(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in V$.

(d) (3 Punkte) Die Abbildung $\phi_a$ ist selbstadjungiert, d.h. $\phi_a^* = \phi_a$ für die bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ zu $\phi_a$ adjungierte Abbildung $\phi_a^*$.

**Lösung:**

(a) (3 Punkte) Die Abbildung $\phi_a$ ist Summe von zwei linearen Abbildungen und damit linear. Der erste Summand ist nämlich die Identität und der zweite Summand ist von der Form, dass eine Linearform mit der Skalarmultiplikation an einen festen Vektor verknüpft ist. Die Linearform ist hier $\langle x, a\rangle$ und der feste Vektor ist $-2\frac{a}{\langle a,a\rangle}$.

(b) (3 Punkte) Es gilt $\phi_a(\phi_a(x)) = (x - 2\frac{\langle x,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a) - 2\frac{\langle (x-2\frac{\langle x,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a),a\rangle}{\langle a,a\rangle}a = x$.

(c) (3 Punkte) Es gilt $\langle \phi_a(x), \phi_a(y)\rangle = \langle x - 2\frac{\langle x,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a, y - 2\frac{\langle y,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a\rangle = \langle x, y\rangle$.

(d) (3 Punkte) Es gilt $\langle \phi_a(x), y\rangle = \langle \phi_a(\phi_a(x)), \phi_a(y)\rangle = \langle x, \phi_a(y)\rangle$ wegen (b) und (c), woraus die Aussage folgt. Alternativ: In den Übungen wurde gezeigt, dass für eine Isometrie gilt, dass die adjungierte mit der inversen Abbildung übereinstimmt.

**Aufgabe 6** (10 Punkte)

Es sei $V$ ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sei weiter $V^*$ der Dualraum und $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von $V$. Die Abbildung $\beta : V^* \times V^* \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$\beta(f, g) := \sum_{i=1}^{n} f(v_i) g(v_i).$$

Man zeige:

(a) (3 Punkte) Für alle $x \in V$ gilt die Identität

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i \rangle v_i.$$

(b) (3 Punkte) $\beta$ definiert ein euklidisches Skalarprodukt auf $V^*$.

(c) (4 Punkte) Die Abbildung $\phi : V \to V^*$ mit

$$\phi(x) := (a \mapsto \langle x, a \rangle)$$

ist eine Isometrie, d.h. $\beta(\phi(x), \phi(y)) = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in V$.

**Lösung:**

(a) (3 Punkte) Es gilt allgemein $x = \sum_{i=1}^{n} v_i^*(x) v_i$ mit der dualen Basis $(v_i^*)$ für Elemente $x$ und Basen $(v_i)$ eines Vektorraums, wie man leicht nachrechnet, wenn man $x = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ schreibt und $v_i^*$ darauf anwendet. Hier gilt offenbar $v_i^* = \langle \cdot, v_i \rangle$.

(b) (3 Punkte) Das rechnet man ohne Probleme nach. Alternativ kann man leicht sehen, dass dies einfach das Standardskalarprodukt auf $V^*$ bezgl. der dualen Basis $(v_i^*)$ von $(v_i)$ ist.

(c) (4 Punkte) Das rechnet man entweder sofort nach, oder man erkennt, dass die Abbildung $\phi$ die Basis $(v_i)$ auf die duale Basis $(v_i^*)$ abbildet und man sowohl in $V$ als auch in $V^*$ einfach das Standardskalarprodukt bzgl. dieser beiden Basen vorliegen hat.

**Aufgabe 7** (10 Punkte)

(a) (5 Punkte) Sei $V$ ein zweidimensionaler $K$-Vektorraum und $\beta : V \times V \to K$ eine nicht-ausgeartete symplektische Bilinearform, d.h. $\beta(x, x) = 0$ für alle $x \in K$.
Zeigen Sie, dass eine Basis $(v_0, v_1)$ von $V$ existiert, sodass die Gram-Matrix von $\beta$ bzgl. dieser Basis die Form

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat.

(b) (5 Punkte) Wir betrachten nun den $K^2$ mit der symplektischen Bilinearform

$$\beta' : K^2 \times K^2 \to K, \text{ mit } \beta'(x, y) := x^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y.$$

Zeigen Sie, dass für Matrizen $A \in K^{2\times 2}$ gilt:

$$\beta'(Ax, Ay) = \beta'(x, y) \text{ für alle } x, y \in K^2 \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) = 1.$$

**Lösung:**

(a) (5 Punkte) Wir fangen mit einer beliebigen Basis $(v_0, v_1)$ von $V$ an. Es gilt dann, dass $\beta(v_0, v_0) = \beta(v_1, v_1) = 0$ und $\beta(v_0, v_1) \neq 0$, da die Form ansonsten konstant null und damit ausgeartet wäre. Durch Skalierung von z.B. $v_1$ kann man erreichen, dass $\beta(v_0, v_1) = 1$. Dann hat man eine gewünschte Basis gefunden. Eine symplektische Bilinearform ist insbesondere schiefsymmetrisch, wie in der Vorlesung gezeigt wurde, also ist auch $\beta(v_1, v_0) = -1$.

(b) (5 Punkte) Dies ist eine einfache Rechnung. Zu zeigen ist, dass

$$A^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

äquivalent zu $\det(A) = 1$ ist. Dazu schreiben wir $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Damit ist

$$A^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & ad - bc \\ -(ad - bc) & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt die Aussage.