Lineare Algebra II
Zwischentest

Dr. Stephan Ehlen, Dr. Chris Jennings-Shaffer, Jonathan Schürr

14.06.18

- Dieser Zwischentest besteht aus 7 Aufgaben und enthält insgesamt 12 Seiten. Sie haben für die Bearbeitung der Aufgaben 180 Minuten Zeit und es gibt insgesamt 72 zu erreichende Punkte. Der Zwischentest gilt mit 36 erreichten Punkten als bestanden.
- Bitte benutzen Sie zur Bearbeitung der Aufgaben Vorder- und Rückseite der Blätter. Geben Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an. Bei Bedarf werden zusätzliche Blätter bereitgestellt.
- Als Hilfsmittel sind zwei handbeschriebene DIN-A4-Blätter erlaubt, sowie Stifte mit schwarzer oder blauer Tinte.
- Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen und führen Sie Berechnungen explizit aus. Sie können Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungsblättern verwenden, ohne diese nochmals zu beweisen, sofern nicht genau dieses gefordert ist. Schreiben Sie deutlich und leserlich.
- Es werden nur Fragen zum Verständnis des Aufgabentextes beantwortet.

Nachname, Vorname | Matrikelnummer | **Gruppe** | **Tutor**

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	Summe	Note
Punkte:									
von:	10	10	10	10	12	10	10	72	

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden reellen Matrizen A und B diagonalisierbar sind und berechnen Sie gegebenenfalls explizite Basiswechselmatrizen S und T, sodass $S^{-1}AS$ und $T^{-1}BT$ Diagonalgestalt haben.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -3 & -11 & -15 \\ 3 & 10 & 13 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei V ein Vektorraum und $f, g \in \mathrm{End}(V)$ Endomorphismen von V.

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Sind f und g diagonalisierbar und vertauschbar, d.h. $f \circ g = g \circ f$, so sind auch $f \circ g$ und $f \pm g$ diagonalisierbar.
2. Sind f und g beide nilpotent, so sind auch $f + g$ und $f \circ g$ nilpotent.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Berechnen Sie die Jordannormalform der folgenden reellen Matrix A. Finden Sie auch eine explizite Jordanbasis.

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es seien A, B zwei 7×7-Matrizen über einem Körper K, welche beide folgende Eigenschaften besitzen:

$$A^5 = B^5 = 0, \quad A^4 \neq 0, B^4 \neq 0, \quad \operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B).$$

Man zeige, dass A und B ähnlich sind, d.h. es existiert ein $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $S^{-1}AS = B$.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarpordukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Wir betrachten die Abbildung $\phi_a : V \to V$ mit $\phi_a(x) := x - 2\frac{\langle x,a \rangle}{\langle a,a \rangle} a$ für ein festes $a \in V$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) (3 Punkte) Die Abbildung ϕ_a ist linear.

(b) (3 Punkte) Die Abbildung ϕ_a ist zu sich selbst invers, d.h. $\phi_a \circ \phi_a = \mathrm{id}$.

(c) (3 Punkte) Die Abbildung ϕ_a ist eine Isometrie, d.h. es gilt $\langle \phi_a(x), \phi_a(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in V$.

(d) (3 Punkte) Die Abbildung ϕ_a ist selbstadjungiert, d.h. $\phi_a^* = \phi_a$ für die bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zu ϕ_a adjungierte Abbildung ϕ_a^*.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sei weiter V^* der Dualraum und $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von V. Die Abbildung $\beta : V^* \times V^* \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$\beta(f, g) := \sum_{i=1}^{n} f(v_i) g(v_i).$$

Man zeige:

(a) (3 Punkte) Für alle $x \in V$ gilt die Identität

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i \rangle v_i.$$

(b) (3 Punkte) β definiert ein euklidisches Skalarprodukt auf V^*.

(c) (4 Punkte) Die Abbildung $\phi : V \to V^*$ mit

$$\phi(x) := (a \mapsto \langle x, a \rangle)$$

ist eine Isometrie, d.h. $\beta(\phi(x), \phi(y)) = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in V$.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

(a) (5 Punkte) Sei V ein zweidimensionaler K-Vektorraum und $\beta : V \times V \to K$ eine nicht-ausgeartete symplektische Bilinearform, d.h. $\beta(x, x) = 0$ für alle $x \in K$.
Zeigen Sie, dass eine Basis (v_0, v_1) von V existiert, sodass die Gram-Matrix von β bzgl. dieser Basis die Form

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat.

(b) (5 Punkte) Wir betrachten nun den K^2 mit der symplektischen Bilinearform

$$\beta' : K^2 \times K^2 \to K, \text{ mit } \beta'(x, y) := x^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y.$$

Zeigen Sie, dass für Matrizen $A \in K^{2\times 2}$ gilt:

$$\beta'(Ax, Ay) = \beta'(x, y) \text{ für alle } x, y \in K^2 \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) = 1.$$