13.4.2016

Wiederholungsübung zur Mathematik I

Dr. Sandra Kliem, Dr. Holger Deppe

Aufgabe 1.
Finden Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{C}$ der Gleichung $x^5 + 10x^3 + 9x = 0$.

Aufgabe 2.
(a) Bestimmen Sie die Taylorpolynome $p_1(x)$ für die Funktionen

$$f(x) = e^{x^3} \quad \text{und} \quad g(x) = x^2 \sin(x)$$

in den Punkten $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$.
(b) Beschreiben Sie den geometrischen Zusammenhang zwischen einer differenzierbaren Funktion auf $\mathbb{R}$ und ihrem Taylorpolynom $p_1(x)$ im Punkt x_0.

Aufgabe 3.
Sei V_1 die Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ und V_2 die Menge aller stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass V_1 und V_2 (unendlichdimensionale) Vektorräume sind und dass die Abbildung $D : V_1 \to V_2$, $D(f) = f'$ (also das Ableiten) eine lineare Abbildung ist.

Aufgabe 4.
Definiere die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Einschränkung von f auf jede Gerade durch den Ursprung von $\mathbb{R}^2$ im Ursprung stetig ist, d.h. es gilt

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = f(0,0), \quad \lim_{y\to 0} f(0,y) = f(0,0), \quad \text{und} \lim_{x\to 0} f(x,cx) = f(0,0)$$

für alle $c \in \mathbb{R}$.
(b) Finden Sie eine Folge $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0,0), \text{ aber } \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) \neq f(0,0).$$

Also ist f **nicht** stetig in $(0,0)$.

Dieses Übungsblatt wird nicht abgegeben oder korrigiert. Die Lösungen werden in der zweiten Vorlesungswoche in den Übungsgruppen besprochen.