13.4.2016

1. Übung zur Vorlesung Mathematik für Lehramtsstudierende II

Dr. Sandra Kliem, Dr. Holger Deppe

Aufgabe 1. (8 Punkte)
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Definiere $d' : X \times X \to \mathbb{R}$ durch $d'(x, y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. Zeigen Sie, dass d' auch eine Metrik auf X ist, und dass die offenen Mengen von (X, d) die gleichen sind wie die offenen Mengen von (X, d').

Aufgabe 2. (8 Punkte)
Wir betrachten den metrischen Raum $(\mathbb{Z}, d)$ mit $d(x, y) = |x - y|$ für $x, y \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: Jede Teilmenge von $\mathbb{Z}$ ist offen und abgeschlossen, und die kompakten Teilmengen von $\mathbb{Z}$ sind genau die endlichen Teilmengen von $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3. (8 Punkte)
Sei $X = \mathbb{R}$ mit der Standardmetrik, und $A = [0, 1] \subset X$.
a) Geben Sie für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilüberdeckung der offenen Überdeckung $(B_\varepsilon(x))_{x\in[0,1]}$ von $[0, 1]$ an. (Nach Satz 1.31 ist A kompakt, also gibt es solche endlichen Teilüberdeckungen stets.)
b) Sei $B = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Finden Sie eine offene Überdeckung von B, die keine endliche Teilüberdeckung hat. B ist also nicht kompakt. (Die Überdeckungen aus Teil a) helfen hierfür nicht.)

Aufgabe 4. (8 Punkte)
Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt (bzgl. der Standardmetrik). Zeigen Sie: Die Menge $A \times B \subset \mathbb{R}^{m+n}$ ist kompakt.

Aufgabe 5. (8 Punkte)
Auf der Menge $X = \mathbb{R}$ definieren wir eine Abbildung $d' : X \times X \to \mathbb{R}$ durch

$$d'(x, y) := \arctan(|x - y|).$$

Hierbei bezeichnet $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\pi, \pi)$ die Umkehrfunktion des Tangens eingeschränkt auf $(-\pi, \pi)$. Zeigen Sie, dass (X, d') ein metrischer Raum ist, und dass die offenen Teilmengen von X bzgl. d' genau die offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ bzgl. der Standardmetrik $d(x, y) = |x - y|$ sind.

Tipp: Zeigen Sie $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und zeigen Sie dann $\arctan(a + b) \leq \arctan(a) + \arctan(b)$, indem Sie beide Seiten als Integral ihrer Ableitung schreiben.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und Gruppennummer deutlich erkennbar auf Ihre Lösung und tackern Sie diese!
Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen und führen Sie Berechnungen explizit aus!
Abgabe: Bis Mittwoch, den 20.4.2016, um 15 Uhr in das entsprechende Fach im Studierendenarbeitsraum (MI, Raum 301). Es sind nur handschriftliche Einzelabgaben zugelassen.