23.6.2016

10. Übung zur Vorlesung Mathematik für Lehramtsstudierende II

Dr. Sandra Kliem, Dr. Holger Deppe

Aufgabe 1. (10 Punkte)
Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Wir betrachten Matrizen $A \in M(5 \times 5, \mathbb{C})$, die nur den einen Eigenwert λ haben. Wie viele verschiedene solche Matrizen kann man finden, sodass keine zwei von ihnen ähnlich zueinander sind?

Aufgabe 2. (12 Punkte, 4+5+3)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{C}).$$

Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von A auf folgende Weise:

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A und zerlegen Sie es in Linearfaktoren (es hat die Form $-(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)^2$ für gewisse $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$).

(b) Zeigen Sie, dass E_{λ_1} und E_{λ_2} beide eindimensional sind, und bestimmen Sie jeweils einen Eigenvektor v_1 bzw. v_2. (A hat also keine Basis aus Eigenvektoren, ist somit nicht diagonalisierbar!) Finden Sie weiterhin einen Vektor $v_3 \in \ker\big((A-\lambda_2 E)^2\big) \supset E_{\lambda_2}$, der nicht in E_{λ_2} liegt und für den $(A-\lambda_2 E)v_3 = v_2$ gilt.

(c) Setzen Sie $S := (v_1, v_2, v_3) \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass S invertierbar ist (bzw. dass v_1, v_2, v_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden), und berechnen Sie $J = S^{-1}AS$.

Aufgabe 3. (8 Punkte)
Zeigen Sie: Liegt ein Fußball zu Beginn der ersten und der zweiten Halbzeit eines Spiels jeweils genau auf dem Anstoßpunkt, dann gibt es mindestens zwei Punkte auf der Fußballoberfläche, die sich beide Male an genau der gleichen Position im Raum befinden.

Aufgabe 4. (10 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass A orthogonal ist, und bringen Sie A in die Normalform orthogonaler Matrizen (d.h. bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ in der Form von Satz 8.31 ist).
Tipp: Die Spalten von S sind Eigenvektor(en) der reellen Eigenwert(e) von A, sowie Real- und Imaginärteil(e) von (komplexen) Eigenvektor(en) der komplexen Eigenwert(e) von A.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und Gruppennummer deutlich erkennbar auf Ihre Lösung und tackern Sie diese!
Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen und führen Sie Berechnungen explizit aus!
Abgabe: Bis Mittwoch, den 29.6.2016, um 15 Uhr in das entsprechende Fach im Studierendenarbeitsraum (MI, Raum 301). Es sind nur handschriftliche Einzelabgaben zugelassen.