30.6.2016

## 11. Übung zur Vorlesung Mathematik für Lehramtsstudierende II

Dr. Sandra Kliem, Dr. Holger Deppe

---

**Aufgabe 1.** (12 Punkte, 2+2+1+2+2+3)
Sei $A \in \mathrm{SO}(2) = \{B \in M(2 \times 2, \mathbb{R}) \mid \det B = 1, B^{-1} = B^T\} \subset M(2 \times 2, \mathbb{C})$. Zeigen Sie:

(a) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert von $A$, dann ist $\lambda^{-1}$ Eigenwert von $A^{-1}$.

(b) Sei $A^* := \overline{A}^T$. Dann gilt $\langle A^*v, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{C}^2$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das komplexe Standard-Skalarprodukt bezeichnet.

(c) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von $A$, dann ist $\overline{\lambda}$ Eigenwert von $A^*$.

(d) $A$ ist über $\mathbb{C}$ ähnlich zu $\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$ mit $\varphi \in [0, 2\pi)$.

(e) Ist $v$ Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $\lambda$, dann ist $\bar{v}$ Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $\overline{\lambda}$.

(f) Sei $v$ Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$, und sei $x = \operatorname{Re} v$, $y = \operatorname{Im} v$. Dann ist

$$Ax = \cos(\varphi)x - \sin(\varphi)y, \quad Ay = \sin(\varphi)x + \cos(\varphi)y.$$

$A$ ist also ähnlich zu der Drehmatrix $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$.

**Aufgabe 2.** (10 Punkte)
Für $v, w \in \mathbb{C}^3$ sei

$$\langle v, w\rangle := 5\bar{w}_1v_1 + i\bar{w}_1v_2 - i\bar{w}_1v_3 - i\bar{w}_2v_1 + 3\bar{w}_2v_2 + \bar{w}_2v_3 + i\bar{w}_3v_1 + \bar{w}_3v_2 + 2\bar{w}_3v_3.$$

Zeigen Sie: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{C}^3$.

**Aufgabe 3.** (10 Punkte, 5+5)

(a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und

$$v : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \ldots, x_n, t) \mapsto v(x_1, \ldots, x_n, t)$$

stetig und in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ stetig partiell differenzierbar. Zeigen Sie, dass $v$ in jedem $t_0 \in I$ die lokale Lipschitz-Bedingung (siehe Bem. 9.7) erfüllt.

(b) Sei nun konkret $n = 2$, $I = (0, 10)$ und $v(x, y, t) := (x^2y^3t, t)$. Geben Sie für jedes $t_0 \in I$ und jedes $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ passende Umgebungen und eine lokale Lipschitz-Konstante $L = L(x_0, y_0, t_0)$ wie in Bem. 9.7 an.

**Aufgabe 4.** (8 Punkte)
Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha(t) = t^3$. Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, die $\alpha$ als Lösung hat, und bestimmen Sie drei weitere Lösungen dieser Differentialgleichung.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und Gruppennummer deutlich erkennbar auf Ihre Lösung und tackern Sie diese!
Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen und führen Sie Berechnungen explizit aus!
**Abgabe:** Bis Mittwoch, den 6.7.2016, um 15 Uhr in das entsprechende Fach im Studierendenarbeitsraum (MI, Raum 301). Es sind nur handschriftliche Einzelabgaben zugelassen.