6.7.2016

12. Übung zur Vorlesung Mathematik für Lehramtsstudierende II

Dr. Sandra Kliem, Dr. Holger Deppe

Aufgabe 1. (10 Punkte)
Wir betrachten die Differentialgleichung $\dot{x} = 3x^{2/3}$ (vgl. Übung 11, Aufgabe 4). Zeigen Sie:

(a) Auf dem Intervall $[\frac{1}{2}, \infty)$ gibt es genau eine Lösung α dieser Differentialgleichung mit $\alpha(1) = 1$. (Nämlich welche?)

(b) Auf dem Intervall $I = (-\infty, \infty)$ erfüllt die zu der DGL gehörende Funktion $v : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}$ *keine* Lipschitzbedingung in der ersten Variablen.

Bem.: Auf I kann es also mehrere Lösungen der DGL mit Anfangswert $\alpha(1) = 1$ geben (und gibt es nach Übung 11, Aufgabe 4 ja auch).

Aufgabe 2. (10 Punkte)
Beweisen Sie den in der Vorlesung erwähnten Banachschen Fixpunktsatz:
Sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines vollständig normierten Vektorraums $(V, \|\cdot\|)$. Die Abbildung $\Phi : A \to A$ sei eine Kontraktion ($\exists\, 0 < \theta < 1 : ||\Phi(x) - \Phi(y)|| \leq \theta ||x - y||\ \forall x, y \in A$). Dann besitzt Φ genau einen Fixpunkt, d.h. $\exists!\, x^* \in A$ mit $\Phi(x^*) = x^*$.

Aufgabe 3. (10 Punkte) Sei $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $I = [-5, 5]$ einer Lipschitzbedingung in der 1. Variablen genügt. Zeigen Sie: Gilt $v(x, -t) = -v(x, t)$ für alle $x, t \in \mathbb{R}$, dann ist jede Lösung $\alpha : I \to \mathbb{R}$ der DGL $\dot{x} = v(x, t)$ gerade, d.h. für jede Lösung α gilt $\alpha(t) = \alpha(-t)$ für alle $t \in I$.

Aufgabe 4. (10 Punkte)
Finden Sie für jeden Anfangswert $x_0 = \alpha(0)$ eine Lösung α der DGL

$$\dot{x} = x(1 - x).$$

Tipp: Partialbruchzerlegung (vgl. Mathe I, Aufgabe 8.3) kann bei der Berechnung hilfreich sein.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und Gruppennummer deutlich erkennbar auf Ihre Lösung und tackern Sie diese!
Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen und führen Sie Berechnungen explizit aus!
Abgabe: Bis Mittwoch, den 13.7.2016, um 15 Uhr in das entsprechende Fach im Studierendenarbeitsraum (MI, Raum 301). Es sind nur handschriftliche Einzelabgaben zugelassen.