13.7.2016

(13.) Bonusübung zur Vorlesung Mathematik für Lehramtsstudierende II

Dr. Sandra Kliem, Dr. Holger Deppe

Aufgabe 1. (7 Punkte)
Finden Sie alle Lösung(en) der Differentialgleichung $\dot{x} = \frac{1}{t}x + t^3$ auf $I = (0, \infty)$.

Lösung.
Es handelt sich um eine inhomogene lineare DGL auf $\mathbb{R}^1$, die wir mit Bem./Lemma 9.18 lösen können (mit $a(t) = \frac{1}{t}$, $b(t) = t^3$). Setze $t_0 = 1$. Die homogene Gleichung $\dot{x} = \frac{1}{t}x$ mit Anfangsbedingung $\alpha_0(t_0) = 1$ hat nach (1) die Lösung

$$\alpha_0(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tau}\, d\tau\right) = \exp(\ln(t) - \ln(t_0)) = \exp(\ln(t)) = t.$$

Nach (3) (Variation der Konstanten) hat die gegebene inhomogene DGL genau die Lösungen $\alpha(t) = u(t)\alpha_0(t)$ mit

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} b(\tau)/\alpha_0(\tau)\, d\tau = u(1) + \int_1^t \tau^3/\tau\, d\tau = C + t^3/3$$

mit $C \in \mathbb{R}$ beliebig, also haben die Lösungen der DGL die Form $\alpha(t) = (C + t^3/3)t = Ct + t^4/3$, $C \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2. (7 Punkte)
Sei

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Lösung $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^3$ der DGL $\dot{x} = Ax$ zum Anfangswert $\alpha(0) = (5, 0, 0)^T$, indem Sie zunächst A in Jordansche Normalform bringen.

Lösung.
Es ist (Entwicklung nach der 3. Zeile)

$$P_A(t) = \det(A - tE) = \det\begin{pmatrix} 3-t & 2 & -1 \\ 2 & 6-t & -2 \\ 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix} = (2-t)((3-t)(6-t) - 4)$$
$$= (2-t)(t^2 - 9t + 14) = -(t-2)^2(t-7)$$

und

$$\ker(A - 2E) = \ker\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\},$$
$$\ker(A - 7E) = \ker\begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \operatorname{Lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

(Man prüft leicht nach, dass die rechts angegebenen Vektoren jeweils im entsprechenden Kern liegen, und damit aus Ranggründen diesen erzeugen.)

Also ist A diagonalisierbar und durch Basiswechsel mit der Matrix $T^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, deren Spaltenvektoren die obigen Eigenvektoren sind, erhalten wir

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} =: B$$

mit

$$T = (T^{-1})^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da $B = TAT^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist, ist sie erst recht in Jordanscher Normalform. Nach Bem. 9.26 ergibt sich die Lösung $\alpha(t)$ der DGL mit $x_0 = (5,0,0)^T$ damit zu

$$\alpha(t) = T^{-1}e^{tB}T \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = T^{-1}e^{tB} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} 4e^{2t} \\ -2e^{2t} \\ e^{7t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{2t} + e^{7t} \\ -2e^{2t} + 2e^{7t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. (7 Punkte)
Lösen Sie die DGL aus Aufgabe 2 (mit gleichem Anfangswert) über den Lösungsansatz von Bem. 9.30.

Lösung.
Wie in der Lösung für Aufgabe 2 berechnet man

$$\begin{aligned} P_A(t) = \det(A - tE) = \det \begin{pmatrix} 3-t & 2 & -1 \\ 2 & 6-t & -2 \\ 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix} &= (2-t)((3-t)(6-t)-4) \\ = (2-t)(t^2 - 9t + 14) = -(t-2)^2(t-7) & \end{aligned}$$

Nach Bem. 9.30 lassen sich die Komponenten jeder Lösung schreiben als komplexe Linearkombinationen von e^2t, te^{2t} und e^{7t}. Wir machen also den Ansatz

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} (a_1 + b_1 t)e^{2t} + c_1 e^{7t} \\ (a_2 + b_2 t)e^{2t} + c_2 e^{7t} \\ (a_3 + b_3 t)e^{2t} + c_3 e^{7t} \end{pmatrix}$$

mit $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}$, $i = 1,2,3$. Dann ist

$$\dot{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} (2a_1 + b_1 + 2b_1 t)e^{2t} + 7c_1 e^{7t} \\ (2a_2 + b_2 + 2b_2 t)e^{2t} + 7c_2 e^{7t} \\ (2a_3 + b_3 + 2b_3 t)e^{2t} + 7c_3 e^{7t} \end{pmatrix}$$

Aus $\dot{\alpha}(t) = A\alpha(t)$ erhalten wir also das Gleichungssystem

$$(2a_1 + b_1 + 2b_1 t)e^{2t} + 7c_1 e^{7t} = 3(a_1 + b_1 t)e^{2t} + 3c_1 e^{7t} + 2(a_2 + b_2 t)e^{2t} + 2c_2 e^{7t} - (a_3 + b_3 t)e^{2t} - c_3 e^{7t}$$

$$(2a_2 + b_2 + 2b_2 t)e^{2t} + 7c_2 e^{7t} = 2(a_1 + b_1 t)e^{2t} + 2c_1 e^{7t} + 6(a_2 + b_2 t)e^{2t} + 6c_2 e^{7t} - 2(a_3 + b_3 t)e^{2t} - 2c_3 e^{7t}$$

$$(2a_3 + b_3 + 2b_3 t)e^{2t} + 7c_3 e^{7t} = 2(a_3 + b_3 t)e^{2t} + 2c_3 e^{7t}$$

Da die Funktionen e^{2t}, te^{2t} und e^{7t} linear unabhängig sind, müssen in jeder der obigen Gleichungen die Koeffizienten vor diesen 3 Funktionen jeweils gleich sein; insgesamt erhalten wir so $3 \times 3 = 9$ Gleichungen in den 9 Unbekannten a_i, b_i, c_i, $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
&(1) & 2a_1 + b_1 &= 3a_1 + 2a_2 - a_3 \\
&(2) & 2b_1 &= 3b_1 + 2b_2 - b_3 \\
&(3) & 7c_1 &= 3c_1 + 2c_2 - c_3 \\
&(4) & 2a_2 + b_2 &= 2a_1 + 6a_2 - 2a_3 \\
&(5) & 2b_2 &= 2b_1 + 6b_2 - 2b_3 \\
&(6) & 7c_2 &= 2c_1 + 6c_2 - 2c_3 \\
&(7) & 2a_3 + b_3 &= 2a_3 \\
&(8) & 2b_3 &= 2b_3 \\
&(9) & 7c_3 &= 2c_3
\end{aligned}$$

(8) ist trivialerweise erfüllt. Aus (7) folgt $b_3 = 0$, aus (9) folgt $c_3 = 0$ und aus der Anfangsbedingung

$$\alpha(0) = \begin{pmatrix} a_1e^0 + c_1e^0 \\ a_2e^0 + c_2e^0 \\ a_3e^0 + c_3e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + c_1 \\ a_2 + c_2 \\ a_3 + c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt $a_1 = 5 - c_1, a_2 = -c_2$ und $a_3 = -c_3 = 0$. Wir können also jeweils den letzten Term aus (1)-(6) streichen und erhalten, dass (2) und (5) äquivalent sind zu $b_1 = -2b_2$, (3) und (6) äquivalent sind zu $c_2 = 2c_1$. Damit ist $a_1 = 5 - c_1 = 5 - c_2/2 = 5 + a_2/2$. Setzen wir dies in (1) und (4) ein, erhalten wir

$$a_1 + 2a_2 = 5 + \frac{5}{2}a_2 = b_1 = -2b_2, \quad 2a_1 + 4a_2 = 10 + 5a_2 = b_2,$$

also $20 + 10a_2 = 2b_2 = -5 - \frac{5}{2}a_2$ und damit $a_2 = -2$, $a_1 = 4$, $b_2 = 0 = b_1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ und damit

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 4e^{2t} + e^{7t} \\ -2e^{2t} + 2e^{7t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man kann relativ leicht nachprüfen, dass dieses α auch tatsächlich die Anfangsbedingung und die DGL erfüllt.

Aufgabe 4. (7 Punkte)
Lösen Sie die DGL $\dot{x} = Ax$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tipp: Lösungsansatz von Bem. 9.30.

Lösung.
Es ist

$$P_A(t) = \det(A - tE) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 0 & 2-t & 1 \\ 0 & -1 & -t \end{pmatrix} = -(t-1)^3.$$

Wir machen also nach Bem. 9.30 den Ansatz

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} (a_1 + b_1 t + c_1 t^2)e^t \\ (a_2 + b_2 t + c_2 t^2)e^t \\ (a_3 + b_3 t + c_3 t^2)e^t \end{pmatrix}$$

Dann ist $\dot\alpha_i(t) = (a_i + b_i + b_i t + 2c_i t + c_i t^2)e^t$ für $i = 1, 2, 3$. Aus $\dot\alpha(t) = A\alpha(t)$ erhalten wir also nach Division durch $e^t \neq 0$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
(a_1 + b_1) + (b_1 + 2c_1)t + c_1 t^2 &= a_1 + b_1 t + c_1 t^2 + a_2 + b_2 t + c_2 t^2 + a_3 + b_3 t + c_3 t^2 \\
(a_2 + b_2) + (b_2 + 2c_2)t + c_2 t^2 &= 2a_2 + 2b_2 t + 2c_2 t^2 + a_3 + b_3 t + c_3 t^2 \\
(a_3 + b_3) + (b_3 + 2c_3)t + c_3 t^2 &= -a_2 - b_2 t - c_2 t^2
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt jeweils drei lineare Gleichungen in den Unbekannten a_i, b_i, c_i:

$$c_1 = c_1 + c_2 + c_3 \iff c_2 = -c_3 \tag{1}$$

$$b_1 + 2c_1 = b_1 + b_2 + b_3 \iff c_1 = \frac{1}{2}(b_2 + b_3) \tag{2}$$

$$a_1 + b_1 = a_1 + a_2 + a_3 \iff b_1 = a_2 + a_3 \tag{3}$$

$$c_2 = 2c_2 + c_3 \iff c_2 = -c_3 \tag{4}$$

$$b_2 + 2c_2 = 2b_2 + b_3 \iff c_2 = \frac{1}{2}(b_2 + b_3) \tag{5}$$

$$a_2 + b_2 = 2a_2 + a_3 \iff b_2 = a_2 + a_3 \tag{6}$$

$$c_3 = -c_2 \tag{7}$$

$$b_3 + 2c_3 = -b_2 \tag{8}$$

$$a_3 + b_3 = -a_2 \tag{9}$$

Da es keine Gleichung gibt, die nur die a_i enthält, versuchen wir a_1, a_2, a_3 frei zu wählen. Dann ergeben sich die Werte für b_1, b_2 und $b_3 = -a_2 - a_3$ aus (3),(6) und (9). Aus (2) erhalten wir nach Einsetzen von (6) und (9) $c_1 = 0$ und aus (5) $c_2 = 0$. Aus den äquivalenten Gleichungen (1), (4) und (7) folgt $c_3 = 0$. Mit diesen Werten ist auch die letzte Gleichung (8) erfüllt. Also hat die DGL die Lösungen

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} (a_1 + (a_2 + a_3)t)e^t \\ (a_2 + (a_2 + a_3)t)e^t \\ (a_3 + (-a_2 - a_3)t)e^t \end{pmatrix}$$

mit a_i beliebig.

Aufgabe 5. (7 Punkte)
Bestimmen Sie alle reellwertigen Lösungen $\alpha \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ der DGL

$$\dot x = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} x.$$

Lösung.
Wir betrachten $B := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ zunächst als Matrix über $\mathbb{C}$. Es gilt

$$P_B(t) = \det(B - tE) = \det \begin{pmatrix} 3-t & 1 \\ -1 & 3-t \end{pmatrix}$$

und $P_B(t)$ hat (z.B. via p-q-Formel) die Nullstellen $t_{1,2} = 3 \pm i$. Wir machen den reellen Ansatz (Bem. 9.34) mit $e^{(3+i)t} = e^{3t}(\cos(t) + i\sin(t))$. Sei also

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} a_1 e^{3t}\cos(t) + b_1 e^{3t}\sin(t) \\ a_2 e^{3t}\cos(t) + b_2 e^{3t}\sin(t) \end{pmatrix}, \quad a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Dann ist

$$\dot{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} 3a_1 e^{3t}\cos(t) - a_1 e^{3t}\sin(t) + 3b_1 e^{3t}\sin(t) + b_1 e^{3t}\cos(t) \\ 3a_2 e^{3t}\cos(t) - a_2 e^{3t}\sin(t) + 3b_2 e^{3t}\sin(t) + b_2 e^{3t}\cos(t) \end{pmatrix}$$

Koeffizientenvergleich ergibt die 4 Gleichungen

$$\begin{aligned} 3a_1 + b_1 &= 3a_1 + a_2 \iff b_1 = a_2 \\ -a_1 + 3b_1 &= 3b_1 + b_2 \iff a_1 = -b_2 \\ 3a_2 + b_2 &= -a_1 + 3a_2 \iff a_1 = -b_2 \\ -a_2 + 3b_2 &= -b_1 + 3b_2 \iff a_2 = b_1 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhalten wir die allgemeine rellwertige Lösung

$$\alpha(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} a_1\cos(t) + a_2\sin(t) \\ a_2\cos(t) - a_1\sin(t) \end{pmatrix}, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 6. (7 Punkte)
Wir betrachten das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 + x_1 &= \sin(t) \end{aligned}$$

Finden Sie alle Lösungen dieses Systems, indem Sie zunächst (durch Raten) die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Differentialgleichungssystems bestimmen.
Tipp: $\sin^2(t)$ hat die Stammfunktion $\frac{1}{2}(t - \sin(t)\cos(t))$ (und welche Ableitung?).

Lösung.
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich sind $\alpha_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$ und $\alpha_2(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ Lösungen des homogenen Gleichungssystems $\dot{x} = Ax$. Da $\alpha_1(0) = (1,0)^T$ und $\alpha_2(0) = (0,1)^T$ linear unabhängig sind, sind auch α_1 und α_2 linear unabhängig und erzeugen damit nach Satz 9.22(b) den homogenen Lösungsraum $L(A, 0)$. Wir wenden nun den Ansatz aus Bem./Lemma 9.23 aus der Vorlesung an, um daraus eine Lösung des inhomogenen Systems zu konstruieren: Sei

$$\Phi(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}, \quad \Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\beta(t) &:= \Phi(t)\int_{t_0=0}^{t}\Phi(\tau)^{-1}b(\tau)d\tau = \begin{pmatrix}\cos(t) & \sin(t)\\ -\sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix}\int_0^t \begin{pmatrix}-\sin^2(\tau)\\ \sin(\tau)\cos(\tau)\end{pmatrix}d\tau\\ &= \begin{pmatrix}\cos(t) & \sin(t)\\ -\sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(\sin(t)\cos(t)-t)\\ \frac{1}{2}\sin^2(t)\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sin(t)-t\cos(t)\\ t\sin(t)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

eine Lösung aus $L(A,b)$. Die gesamte Lösungsmenge ist dann

$$L(A,b) = \beta(t) + L(A,0) = \left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sin(t)-t\cos(t)\\ t\sin(t)\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}\cos(t)\\ -\sin(t)\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}\,\middle|\, \lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}.$$