

## 2. Übung zur Vorlesung Mathematik für Lehramtsstudierende II

Dr. Sandra Kliem, Dr. Holger Deppe

---

### Aufgabe 1. (10 Punkte)

Seien  $r, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x) = (r \cos(x), r \sin(x), cx).$$

- (a) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve  $f$ .
- (b) Bestimmen Sie die Umparametrisierung auf Bogenlänge  $\varphi$  von  $f$ .
- (c) Berechnen Sie die Krümmung von  $\varphi$  in jedem Punkt und die Evolute von  $\varphi$ .

### Aufgabe 2. (10 Punkte)

Für  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  sei

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x) = (e^{cx} \cos(x), e^{cx} \sin(x)).$$

- (a) Skizzieren Sie die Spur der Kurve  $f$  für  $c = \frac{1}{2\pi}$ .
- (b) Berechnen Sie für jedes Intervall  $[a, b]$  die Bogenlänge  $L_{a,b}$  der Kurve  $f|_{[a,b]}$ .
- (c) Bestimmen Sie  $\lim_{a \rightarrow -\infty} L_{a,0}$ , wenn er existiert (also die „Bogenlänge“ von  $f|_{[-\infty,0]}$ ).
- (d) Zeigen Sie, dass  $f$  jeden Kreis um den Ursprung in genau einem Punkt schneidet, und bestimmen Sie den Schnittwinkel des Kreises mit  $f$ .

### Aufgabe 3. (10 Punkte)

Sei  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y > 0\} \subset \mathbb{R}^3$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x, y, z) = xyz + x^y + y^z$ . Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von  $f$  in jedem Punkt  $a = (x, y, z) \in D$ .

### Aufgabe 4. (10 Punkte)

Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $a \in D$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$ , und seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen, sodass die Richtungsableitungen  $D_v f(a)$  und  $D_v g(a)$  existieren. Zeigen Sie, dass die Richtungsableitungen die Summen-, Produkt- und Quotientenregel wie im eindimensionalen Fall erfüllen, d.h. die Richtungsableitungen  $D_v(f+g)(a)$ ,  $D_v(fg)(a)$  und  $D_v(f/g)(a)$  (für  $g(a) \neq 0$ ) existieren und es gilt

$$\begin{aligned} D_v(f+g)(a) &= D_v f(a) + D_v g(a), \\ D_v(fg)(a) &= D_v f(a) \cdot g(a) + D_v g(a) \cdot f(a), \\ D_v(f/g)(a) &= \frac{D_v f(a) \cdot g(a) - D_v g(a) \cdot f(a)}{g(a)^2}. \end{aligned}$$

---

Bitte schreiben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und Gruppennummer deutlich erkennbar auf Ihre Lösung und tackern Sie diese!

Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen und führen Sie Berechnungen explizit aus!

**Abgabe:** Bis Mittwoch, den 27.4.2016, um 15 Uhr in das entsprechende Fach im Studierendenarbeitsraum (MI, Raum 301). Es sind nur handschriftliche Einzelabgaben zugelassen.