27.4.2016

3. Übung zur Vorlesung Mathematik für Lehramtsstudierende II

Dr. Sandra Kliem, Dr. Holger Deppe

Aufgabe 1. (6 Punkte)
Zeigen Sie: Der Mittelwertsatz gilt i.A. nicht für Kurven, d.h. für eine differenzierbare Kurve $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ gibt es im Allgemeinen kein $\xi \in [a,b]$ mit $f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi)$.
Tipp: Betrachten Sie $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$.

Aufgabe 2. (8 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist, aber in $(0,0)$ nicht stetig partiell differenzierbar.

Aufgabe 3. (10 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = 1 + 3x + 4y + 5xy^2$.
(a) Zeigen Sie, dass f in $a = (0,0)$ differenzierbar ist und bestimmen Sie das Differential $d_a f$.
(b) Zeigen Sie, dass f in $b = (1,2)$ differenzierbar ist und bestimmen Sie das Differential $d_b f$.

Aufgabe 4. (8 Punkte)
Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar und definiere $f \cdot g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $f \cdot g$ differenzierbar ist und dass für alle $a \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$d_a(f \cdot g) = g(a)d_a f + f(a)d_a g$$

Aufgabe 5. (8 Punkte)
Analog zu den Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$ kann man Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ definieren: Einem Punkt $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ordnen wir das Tripel (r,θ,ϕ) zu, wobei $r \in \mathbb{R}_0^+$ die Länge der Verbindungsstrecke des Punkts zum Ursprung ist, $\theta \in [0,\pi]$ der Winkel zwischen der z-Achse und der Strecke und $\phi \in [0,2\pi]$ der Winkel zwischen x-Achse und der Projektion der Strecke auf die x-y-Ebene. Umgekehrt erhalten wir (x,y,z) aus (r,θ,ϕ) durch die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (r,\theta,\phi) \mapsto (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$$

(eingeschränkt auf $\mathbb{R}_0^+ \times [0,\pi] \times [0,2\pi]$). Zeigen Sie, dass f differenzierbar in jedem $a \in \mathbb{R}^3$ ist, und bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $J_f(a)$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und Gruppennummer deutlich erkennbar auf Ihre Lösung und tackern Sie diese!
Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen und führen Sie Berechnungen explizit aus!
Abgabe: Bis Mittwoch, den 4.5.2016, um 15 Uhr in das entsprechende Fach im Studierendenarbeitsraum (MI, Raum 301). Es sind nur handschriftliche Einzelabgaben zugelassen.