

6. Übung zur Vorlesung Mathematik für Lehramtsstudierende II

Dr. Sandra Kliem, Dr. Holger Deppe

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Sei

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < x^2 + y^2 < 4\}$$

(d.h. Ω liegt oberhalb der (x, y) -Ebene und wird von dieser, dem Zylinder $x^2 + y^2 = 4$ und dem Paraboloid $z = x^2 + y^2$ berandet). Berechnen Sie

$$\int_{\Omega} (x^2 + y^2) d(x, y, z)$$

durch Transformation auf Zylinderkoordinaten

$$\mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (r, \phi, z) \mapsto (x, y, z) = (r \cos \phi, r \sin \phi, z).$$

Aufgabe 2. (10 Punkte) Berechnen Sie

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 - y^2} d(x, y)$$

mit Hilfe einer Transformation in Polarkoordinaten

$$\mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (r, \phi) \mapsto (x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi).$$

Bestimmen Sie damit dann das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Hinweis: Sie dürfen für diese Aufgabe ohne Beweis den Satz von Fubini und den Transformationssatz auch für unbeschränkte Integrationsbereiche verwenden.

Bemerkung: Die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ hat keine (elementare) Stammfunktion, aber mit obigem Trick kann man trotzdem das uneigentliche Integral von f berechnen.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Wir identifizieren die Menge der 3×3 -Matrizen $M(3 \times 3, \mathbb{R})$ mit dem \mathbb{R}^9 , indem wir der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

den Vektor mit Einträgen $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ zuordnen.

Zeigen Sie: Die Menge $\text{SL}_3(\mathbb{R}) = \{A \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ ist eine Hyperfläche in $M(3 \times 3, \mathbb{R})$.

Aufgabe 4. (10 Punkte)

Seien $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y, z) := x^2 + xy - y - z, \quad g(x, y, z) := 2x^2 + 3xy - 2y - 3z$$

und sei $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0\}$. Zeigen Sie, dass M eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 ist und dass $\phi : \mathbb{R} \rightarrow M$, $\phi(t) = (t, t^2, t^3)$ für jedes $a \in M$ eine lokale Parametrisierung ist.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und Gruppennummer deutlich erkennbar auf Ihre Lösung und tackern Sie diese!

Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen und führen Sie Berechnungen explizit aus!

Abgabe: Bis Mittwoch, den 1.6.2016, um 15 Uhr in das entsprechende Fach im Studierendenarbeitsraum (MI, Raum 301). Es sind nur handschriftliche Einzelabgaben zugelassen.