1.6.2016

7. Übung zur Vorlesung Mathematik für Lehramtsstudierende II

Dr. Sandra Kliem, Dr. Holger Deppe

Aufgabe 1. (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie: $M := \{x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 y\} \subset \mathbb{R}^3$ ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

(b) Bestimmen Sie eine Parametrisierung $\Phi : \mathbb{R}^2 \to M$.

(c) Sei $p = (0, 0, 0)$. Bestimmen Sie den Tangentialraum $T_p M$ und den Normalraum $N_p M$.

Aufgabe 2. (10 Punkte)
Zeigen Sie, dass weder das Koordinatenachsenkreuz $K = \{x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ noch die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 = y^2\}$ eindimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^2$ sind.
Tipp: Tangentialraum.

Aufgabe 3. (10 Punkte)
Sei $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 3y^2 = 6\}$. Bestimmen Sie für jedes $p \in E$ den Tangentialraum $T_p E$ und den Normalraum $N_p E$.

Aufgabe 4. (10 Punkte)
Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to V$ ein Diffeomorphismus (vgl. Def. 3.55). Sei $M \subset U$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass $M' := f(M)$ dann auch eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist, und dass für $a \in M$ gilt:

$$(d_a f)(T_a M) = T_{f(a)} M'$$

Bitte schreiben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und Gruppennummer deutlich erkennbar auf Ihre Lösung und tackern Sie diese!
Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen und führen Sie Berechnungen explizit aus!
Abgabe: Bis Mittwoch, den 8.6.2016, um 15 Uhr in das entsprechende Fach im Studierendenarbeitsraum (MI, Raum 301). Es sind nur handschriftliche Einzelabgaben zugelassen.