15.6.2016

9. Übung zur Vorlesung Mathematik für Lehramtsstudierende II

Dr. Sandra Kliem, Dr. Holger Deppe

Aufgabe 1. (5 Punkte, zur Wiederholung)
Sei $A \in M(n \times n, K)$ eine invertierbare Matrix und seien $v_1, \ldots, v_k \in K^n$ linear unabhängig. Zeigen Sie: Die Vektoren $Av_1, \ldots, Av_k$ sind auch linear unabhängig.

Aufgabe 2. (15 Punkte, 3+3+3+6)
Welche der folgenden Matrizen sind diagonalisierbar? Geben Sie jeweils die Eigenwerte mit algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an.

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3. (10 Punkte, 5+5)
Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A, und geben Sie eine invertierbare Matrix $T \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ an, sodass TAT^{-1} eine Diagonalmatrix ist.

(b) Berechnen Sie A^{100} (ohne Computer).

Aufgabe 4. (10 Punkte)
Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Zeigen Sie, dass M diagonalisierbar ist und nur reelle Eigenwerte hat.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und Gruppennummer deutlich erkennbar auf Ihre Lösung und tackern Sie diese!
Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen und führen Sie Berechnungen explizit aus!
Abgabe: Bis Mittwoch, den 22.6.2016, um 15 Uhr in das entsprechende Fach im Studierendenarbeitsraum (MI, Raum 301). Es sind nur handschriftliche Einzelabgaben zugelassen.