4. Integration im $\mathbb{R}^n$

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$

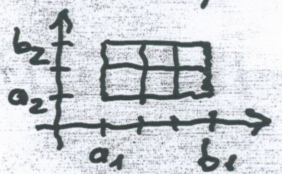
$$= \{x = (x_1, \dots, x_n) : a_i \leq x_i \leq b_i,\ 1 \leq i \leq n\}$$

ein abgeschlossener Block und $f: A \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

Definiere $\quad vol(A) := (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$.

Wdh.: Eine Zerlegung Z von $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ist ein Tupel $(x_0, x_1, \dots, x_m)$, $m \in \mathbb{N}$, mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$.
Setze $|Z| = m$.

Nun: Eine Zerlegung $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ von A ist ein Tupel, so dass für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, Z_i eine Zerl. von $[a_i, b_i]$ ist.

Bem.: 

Man erhält $|Z_1| \cdots |Z_n|$ Teilblöcke.

Riemannsche Unter- bzw. Obersumme: $(f: A \to \mathbb{R})$

Bezeichne mit $\sum_S$ die Summe über alle Teilblöcke S, die sich gemäß einer Zerlegung Z ergeben. Dann ist

$$U(Z,f) := \sum_S vol(S) \cdot \inf\{f(x) : x \in S\},$$
$$O(Z,f) : \sum_S vol(S) \cdot \sup\{f(x) : x \in S\}.$$

Bem. 4.1: $U(Z,f) \leq O(Z,f)$.

Lemma 4.2: Angenommen Z' verfeinert Z (d.h. jeder Teilblock von Z' ist in einem Teilblock von Z enthalten). Dann gilt

$$U(Z,f) \leq U(Z',f) \quad \text{und} \quad O(Z',f) \leq O(Z,f).$$

Korollar 4.3: Seien Z_1, Z_2 bel. Zerlegungen, dann gilt

$$U(Z_1,f) \leq O(Z_2,f).$$

Bem. 4.4 Daraus folgt: $\sup\limits_{Z_1} U(Z_1,f) \overset{(*)}{\leq} \inf\limits_{Z_2} O(Z_2,f)$ existieren.

Def. 4.5 Ist $f: A \to \mathbb{R}$ beschränkt und gilt Gleichheit in (*), so heißt f Riemann-integrierbar. Man schreibt dann

$$\int_A f(x)\,dx = \int_A f(x_1,\dots,x_n)\,d(x_1,\dots,x_n) := \sup_{Z_1} U(Z_1,f) \quad \left(= \inf_{Z_2} O(Z_2,f)\right).$$

Bem. 4.6 f ist R-integrierbar gdw $\forall \varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von A ex., so dass $(0 \leq)\, O(Z,f) - U(Z,f) < \varepsilon$.

Frage: Hinreichende Bedingungen?

Def. 4.7 Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^n$ hat das n-dim. Jordan-Maß 0, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Blöcke $Q_1, \dots, Q_N \subset \mathbb{R}^n$, $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$S \subset \bigcup_{k=1}^{N} Q_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{N} \operatorname{vol}(Q_k) < \varepsilon.$$

Man nennt S dann auch n-dim. Jordan'sche Nullmenge.

Satz 4.8 Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Block, $f: A \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Fkt., und

$$U := \{x \in A : f \text{ unstetig in } x\}$$

die Unstetigkeitsmenge von A. Dann gilt:

U hat Jordan-Maß $0 \Rightarrow f$ R-int.bar über A.

Verallgemeinerung zu bel. Integrationsbereich:

Def. 4.9 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge und $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Block, so dass $D \subset A$.
Eine beschränkte Fkt. $f: D \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar über D, wenn die Funktion

$$g: A \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D, \\ 0, & x \in A \setminus D \end{cases}$$

integrierbar über A ist, und man setzt

$$\int_D f(x)\,dx := \int_A g(x)\,dx.$$

Bem. 4.10 Die Funktion g wird i. A. auf ∂D unstetig sein, selbst wenn f stetig ist.

Bem. 4.11 „Übliche Eig." wie z.B. $\int_D f+g = \int_D f + \int_D g$ gelten.

Als Folgerung erhält man:

Satz 4.12 Eine beschränkte Fkt. $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, ist int.bar über D, wenn gilt:
1.) ∂D ist eine n-dim. Jordan'sche Nullmenge
und 2.) die Menge U der Unstetigkeitsstellen von f ist eine n-dim. Jordan'sche Nullmenge.