Exkurs zu Nullstellen von Polynomen

(vgl. z.B. Fischer, LinA, Aufl. 18, Kap. 1.3)

(1) Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in K$ die verschiedenen Nullstellen eines Polynoms P mit Koeffizienten aus K, so existieren $r_1, \dots, r_\ell$, die sog. (algebraischen) Vielfachheiten der Nullstellen, so dass

$$P(t) = (t-\lambda_1)^{r_1} \cdots (t-\lambda_\ell)^{r_\ell} \cdot Q(t), \quad t \in K,$$

wobei Q ein Polynom vom Grad $\deg(Q) = \deg(P) - (r_1 + \dots + r_\ell)$ ohne Nullstellen ist.

Der „schlimmste" Fall ist $P = Q$, der „beste" $\deg(Q) = 0$ (d.h. $Q(t) \equiv$ konst.), d.h. P zerfällt in Linearfaktoren.

(2) Die wichtigste Existenzaussage für Nullstellen von Polynomen macht der sog.

Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom P mit Koeff. aus $K = \mathbb{C}$ und $\deg(P) > 0$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

(3) Korollar: Jedes Polynom P mit Koeff. aus $\mathbb{C}$ zerfällt über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren, d.h. $\exists a, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ mit $n = \deg(P)$, so dass

$$P(t) = a(t-\lambda_1) \cdots (t-\lambda_n), \qquad t \in \mathbb{C}.$$

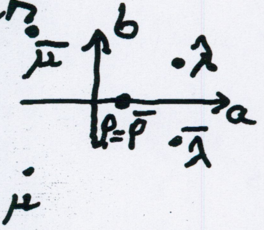
(4) Für $K = \mathbb{R}$ erhält man zuerst

Korollar: Jedes Polynom P mit reellen Koeff. von ungeradem Grad hat mind. eine reelle Nullstelle.

Bew.: $\lim_{t \to \pm\infty} P(t) = \pm\infty$, Zwischenwertsatz (Teil 1-§5.4). $\square$

(5) Da $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, können wir den Fundamentalsatz der Algebra auch für Polynome mit reellen Koeff. ausnutzen. Insb. gilt

<u>Bem.:</u> Ist $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ eine Nullstelle von P mit Koeff. <u>in $\mathbb{R}$</u>, so ist auch $\overline{\lambda} = a - ib$ eine Nullstelle von P.



Bew.:
$$\begin{aligned}
P(\overline{\lambda}) &= c_n \overline{\lambda}^n + c_{n-1} \overline{\lambda}^{n-1} + \dots + c_1 \overline{\lambda} + c_0 \\
&\underset{c_i \in \mathbb{R}}{\overset{\uparrow}{=}} \overline{c_n}\, \overline{\lambda}^n + \overline{c_{n-1}}\, \overline{\lambda}^{n-1} + \dots + \overline{c_1}\, \overline{\lambda} + \overline{c_0} \\
&= \overline{c_n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + c_1 \lambda + c_0} \\
&= \overline{P(\lambda)} = \overline{0} = 0. \quad \square
\end{aligned}$$

<u>Bem.:</u> Ist insb. $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \notin \mathbb{R}$, so ist $\lambda \neq \overline{\lambda}$ und
$$\begin{aligned}
(t-\lambda)(t-\overline{\lambda}) &= t^2 - t(\lambda + \overline{\lambda}) + \lambda \cdot \overline{\lambda} \\
&\underset{i^2 = (-i)^2 = -1}{\overset{\uparrow}{=}} t^2 - t \cdot \underbrace{2a}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(a^2 + b^2)}_{\in \mathbb{R}}
\end{aligned}$$
ist ein Polynom 2. Grades mit <u>reellen</u> Koeff.

(6) Es folgt:

<u>Satz:</u> Jedes Polynom P mit reellen Koeff. und $\deg(P) = n \geq 1$ gestattet die Zerlegung
$$P(t) = a \cdot (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_\ell) \cdot Q_1(t) \cdots Q_m(t),$$
wobei $a, \lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $Q_i(t)$ reelle, normierte (d.h. $\underline{1} \cdot t^2 \pm \dots$) Polynome vom Grad 2 ohne <u>reelle</u> Nullstellen sind.

Insb. ist $n = \ell + 2m$.