„M als Nullstellenmenge"

① <u>Def. 5.1</u> Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt <u>k-dimensionale Untermannigfaltigkeit</u> der Klasse C^ℓ ($\ell \in \mathbb{N}$), falls es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung U von a in $\mathbb{R}^n$ gibt und C^ℓ-Funktionen

$$f_1, \dots, f_{n-k} : U \to \mathbb{R}, \quad \text{so dass}$$

(i) $M \cap U = \{x \in U : f_1(x) = \dots = f_{n-k}(x) = 0\}$,

(ii) $\operatorname{rang}\left(\underbrace{\frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-k})}{\partial(x_1, \dots, x_n)}}_{\in M((n-k)\times n)}(a) \right) = n-k$

($\Leftrightarrow \operatorname{grad} f_1(a), \dots, \operatorname{grad} f_{n-k}(a) \in \mathbb{R}^n$ lin. unabh.).

<u>Def. 5.3</u> Eine <u>Hyperfläche</u> ist eine $(n-1)$-dim. Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, d.h. lokal $\{x \in U : f(x) = 0\}$ mit $\operatorname{grad} f \neq 0$ entlang $\{x \in U : f(x) = 0\}$.

② <u>Satz 5.5</u> „M ist lokal ein Graph" (① ⇒ ②)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dim. Untermannigfaltigkeit der Klasse C^ℓ und $a = (a_1, \dots, a_n) \in M$. Dann gibt es nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten offene Umgebungen

$$U' \subset \mathbb{R}^k \quad \text{von} \quad a' := (a_1, \dots, a_k),$$

$$U'' \subset \mathbb{R}^{n-k} \quad \text{von} \quad a'' := (a_{k+1}, \dots, a_n)$$

und $g \in C^\ell(U', U'')$ so dass

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' : x'' = g(x')\}.$$

<u>Bem. 5.6</u> Dies ist sogar eine äquivalente Def. einer Untermannigfaltigkeit (② ⇒ ①).

③ **<u>Satz 5.8</u>** „M sieht lokal so aus wie $\mathbb{R}^k$ $(\subset \mathbb{R}^n)$" (② ⇒ ③)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dim. Untermannigfaltigkeit der Klasse C^ℓ und $a \in M$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von a in $\mathbb{R}^n$ und einen C^ℓ-Diffeomorphismus (vgl. Def. 3.55)

$$F : U \to V$$

auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$, so dass

$$F(M \cap U) = E_k \cap V,$$

wobei $E_k := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\}$.

<u>Bem. 5.9</u> (vgl. Bem. 5.4: ③ ⇒ ①)

④ **<u>Satz 5.10</u>** „M besitzt lokal Karten" (② ⇒ ④)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dim. Untermannigfaltigkeit der Klasse C^ℓ und $a \in M$. Dann gibt es eine offene Umgebung $\tilde{U} \subset M$ von a in M (d.h. $\tilde{U} \subset M$ ist relativ offen bzgl. M – vgl. Def. 1.22 – und $a \in \tilde{U}$), eine offene Menge $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^k$ und eine Abbildung

$$\Phi : \tilde{V} \to \tilde{U} \quad \text{mit}$$

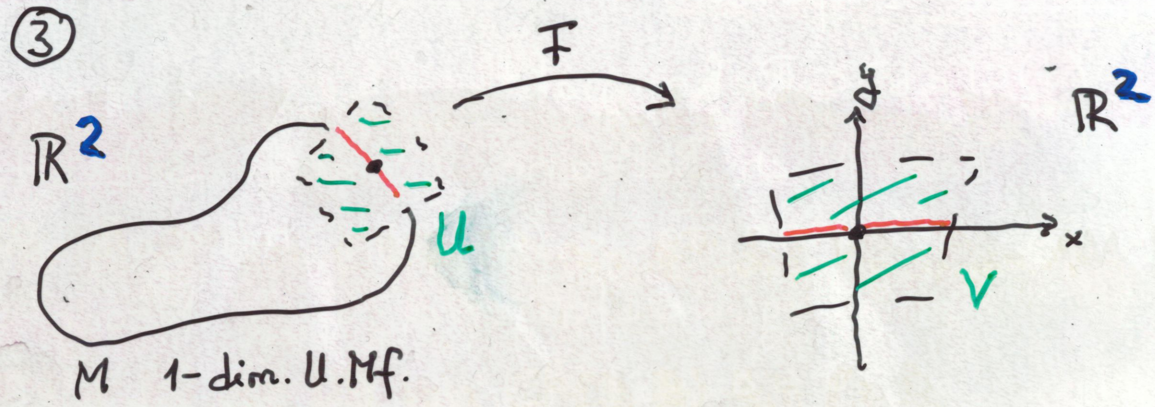
$$\left.\begin{array}{l} \text{(a) } \Phi \in C^\ell(\tilde{V}, \mathbb{R}^n), \\ \quad\ \operatorname{Rang}(J_\Phi(t)) = k, \quad \forall t \in \tilde{V}, \end{array}\right\} \Phi \text{ ist } \underline{C^\ell\text{-Immersion}}$$

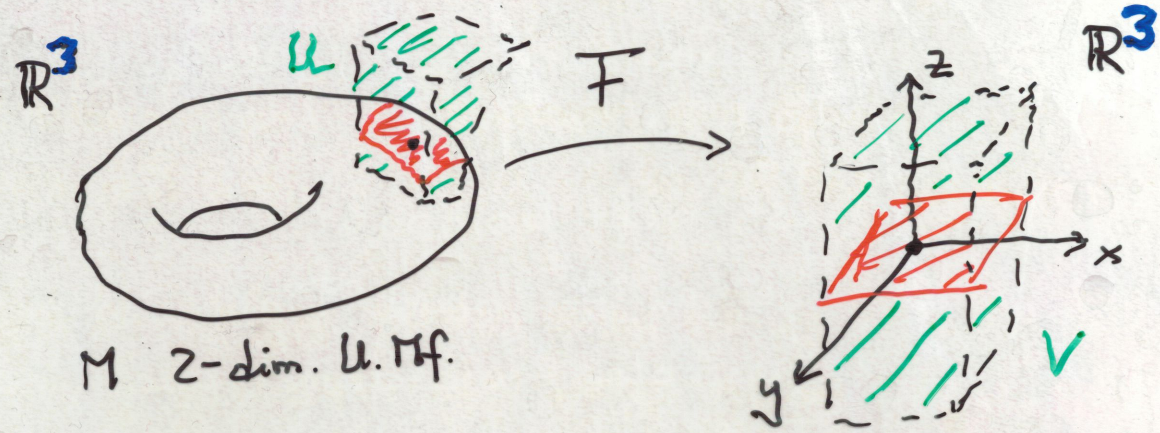
$$\left.\begin{array}{l} \text{(b) } \Phi \text{ ist bijektiv und} \\ \quad\ \Phi, \Phi^{-1} \text{ sind stetig.} \end{array}\right\} \Phi \text{ ist Homöomorphismus (vgl. Def. 3.55)}$$

<u>Bem. 5.11</u> (vgl. Bem. 5.4: ④ ⇒ ①, ②, ③)

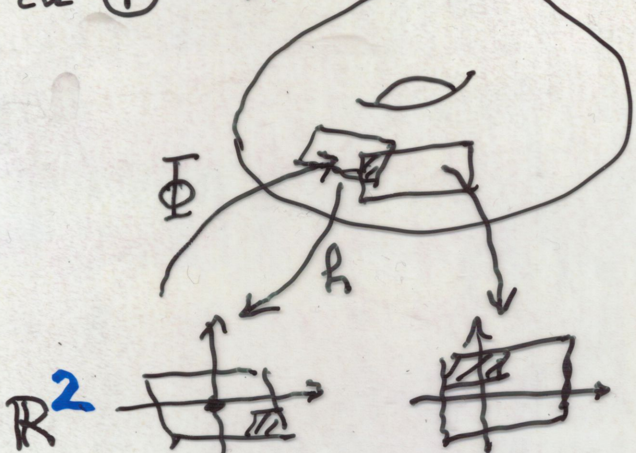
<u>Def. 5.12</u> Die Abb. Φ wird als <u>lokale Parametrisierung</u> bezeichnet, die Abb. $h := \Phi^{-1} : \tilde{U} \to \tilde{V}$ als <u>Karte</u>.

zu 3





zu 4 $\mathbb{R}^3$



<u>Ziel u.a.:</u> „f herunterholen"