Bem. 5.24 Ist γ_0 ein C^1-Kurve in $\tilde{V}_M$, so ist $h^{-1}\circ\gamma_0 =: \gamma$ offensichtlich eine C^1-Kurve in $\tilde{U}_M$. Umgekehrt kann man jede C^1-Kurve γ in $\tilde{U}_M$ in der Form $h^{-1}\circ\gamma_0$ mit γ_0 eine C^1-Kurve in $\tilde{V}_M$ schreiben: Schreibe z.B. M lokal als Graph, d.h. $h = \Phi^{-1}$ und $\Phi(x) = (x, g(x))$ mit $\Phi^{-1}(x,y) = h(x,y) = x$ diff.bar und $\gamma_0 := h \circ \gamma$.

Bew. Satz: Seien $\Phi : \tilde{V}_M \to \tilde{U}_M$ und $\Psi : \tilde{V}_N \to \tilde{U}_N$ lok. Param. mit $\Phi(0) = p$ und $\Psi(0) = f(p)$.

Sei $v \in T_pM$. Wähle C^1-Kurve $\gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$.

Schreibe (Bem. 5.24) $\gamma = h^{-1}\circ\gamma_0$ mit γ_0 C^1-Kurve in $\tilde{V}_M$,

$\gamma_0(0) = 0$, $\gamma_0'(0) =: v_0$, also $v = (h^{-1}\circ\gamma_0)'(0) \overset{K}{=} J_{h^{-1}}(\gamma_0(0))(\gamma_0'(0)) = J_{h^{-1}}(0)(v_0)$.

Definiere $\gamma_1 := (k\circ f\circ h^{-1})\circ\gamma_0$ C^1-Kurve in $\tilde{V}_N$, dann

$\gamma_1(0) = 0$, $\gamma_1'(0) = J_{k\circ f\circ h^{-1}}(0)(v_0) =: v_1$.

Es bleibt z.z.: $d_pf(v) = J_{k^{-1}}(0)(v_1)$:

$J_{k^{-1}}(0)(v_1) \overset{K}{=} (k^{-1}\circ\gamma_1)'(0) = \frac{d}{dt}(k^{-1}\circ k\circ f\circ h^{-1}\circ\gamma_0)(0) = \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(0) \overset{\text{Def.}}{=} d_pf(v)$. $\square$

<u>Bem. 5.25</u> d_pf lin. Abb., da $J_{\psi^{-1}\circ f\circ\Phi}$ lin. Abb. (in Form einer Matrix)
und ~~Zshg.~~ $v = J_{h^{-1}}(0)(v_0)$, $d_pf(v) = J_{k^{-1}}(0)(v_1)$, d.h. d_pf Verknüpfung lin. Abb. Wohldef. (Def. unabh. von γ) da $J_{k\circ f\circ h^{-1}}$ unabh. von γ.

[Geiges-Skript S. 139a: Wende den Satz insb. auf $f = id_M : M \to M$ an.
Dies führt zu „Physiker-Def." von Tangentialvektoren:
Ein Tangentialvektor in $p \in M$ ist eine Zuordnung, die jeder Karte h um p einen Vektor $v \in \mathbb{R}^k$ so zuordnet, dass einer anderen Karte k der Vektor $J_{k\circ h^{-1}}(0)$ entspricht.]