1.2. Konvergenz, Stetigkeit in metr. Räumen

(vgl. insb. auch Teil 1 – dies ist nur eine Wdh. / Ergänzung)

Def. 1.24 Sei (X,d) metr. R. und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten aus X. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt <u>konvergent</u> gegen den Punkt $a\in X$, in Zeichen $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, wenn gilt:

Teil 1: $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n\geq n_0: \underbrace{d(x_n,a)<\varepsilon}_{\Leftrightarrow\, x_n\in B_\varepsilon(a)}$

$\Leftrightarrow$ Zu jeder Umgebung U von a existiert ein $N_0\in\mathbb{N}$, so dass $x_n\in U$ für alle $n\geq N_0$.

Def. 1.25 Seien (X,d_X) und (Y,d_Y) metr. Räume und $f:X\to Y$. Eine Abb. f heißt <u>stetig im Punkt $a\in X$</u>, falls $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, d.h.

Teil 1: (ε-δ-Kriterium)

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: Für alle $x\in X$ mit $\underbrace{d_X(x,a)<\delta}_{\Leftrightarrow\, x\in B_\delta(a)\subset X}$ gilt $\underbrace{d_Y(f(x),f(a))<\varepsilon}_{\Leftrightarrow\, f(x)\in B_\varepsilon(f(a))\subset Y}$.

$\Longleftrightarrow$

Zu jeder Umgebung V von $f(a)\in Y$ gibt es / ex. eine Umg. U von $a\in X$ mit $f(U)\subset V$.

Bem.: Dann def. man „f stetig" durch „f stetig in $a\in X$, $\forall a\in X$".

Def. 1.26 Sei $f:X\to Y$ eine Abb. Dann ist das <u>Urbild von $A\subset Y$</u> <u>bzgl. f</u>,

$f^{-1}(A) := \{x\in X: f(x)\in A\}\subset X$.

Satz 1.27 Eine Abb. $f: X\to Y$ zwischen metr. Räumen ist <u>genau dann</u> auf <u>ganz X</u> stetig, wenn das Urbild $f^{-1}(V)$ <u>jeder</u> offenen Menge $V\subset Y$ offen <u>in X</u> ist.

Bew.: vgl. Teil 1.

Bem. 1.28 Ist f nur auf $\boxed{D\subset X}$ definiert, (X,d) metr. Raum, so ist $f: D\to Y$ stetig <u>gdw</u> das Urbild $f^{-1}(V)$ jeder offenen Menge $V\subset Y$ <u>relativ offen</u> <u>bzgl. D</u> ist.