Vorbereitungen zum Beweis von Satz 3.45

Lemma 3.47 Sei $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in M(m\times n, \mathbb{R})$ und

$\|A\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$ die euklidische Norm von A.

Dann gilt: $\|\underbrace{Ax}_{\in\mathbb{R}^m}\| \leq \|A\| \cdot \|\underbrace{x}_{\in\mathbb{R}^n}\|.$

Bew.: $\|Ax\|^2 = \|(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j)\|^2$

$$= \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)}_{\circledast}^2$$

$\circledast = \left\langle \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle$ und nach Cauchy-Schwarz-Ungl.

damit $|\circledast| \leq \left\| \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|$, d.h.

$$\|Ax\|^2 \leq \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right) \cdot \|x\|^2 = \|A\|^2 \cdot \|x\|^2. \qquad \square$$

Lemma 3.48 Sei $A \in M(n\times n, \mathbb{R})$ symmetrisch und positiv definit, negativ definit oder indefinit. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass auch jede symmetr. $n\times n$-Matrix B mit $\|A - B\| < \varepsilon$ die entsprechende Eigenschaft hat.

Bew.: Sei A pos. definit (andere Fälle analog).

$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ Einheitssphäre

ist kompakt nach dem Satz von Heine-Borel (beschränkt ✓ abgeschlossen, da $S^{n-1} = h^{-1}(\{1\})$ für $h(x) := \|x\|$ stetig und $\{1\}$ abg. in $\mathbb{R}$).

Also ist für alle $x \in S^{n-1}$ mit $f(x) := x^T A x$,

$$x^T A x \geq \inf_{x \in S^{n-1}} f(x) \underset{\uparrow}{=} x_{min}^T A x_{min} =: \alpha \underset{\substack{\uparrow \\ A \text{ pos. def.}}}{>} 0.$$

f stetig nimmt auf komp. Menge Min. an

Setze $\varepsilon := \alpha/2$. Für $\|A-B\| < \varepsilon$ gilt dann

$$|x^T A x - x^T B x| = |x^T (A-B) x| = |\langle x, (A-B)x \rangle|$$
$$\overset{C.S.}{\leq} \|x\| \cdot \|(A-B)x\|$$
$$\overset{\text{Lemma 3.47}}{\leq} \|A-B\| \cdot \|x\|^2 < \varepsilon \cdot \|x\|^2 = \varepsilon = \frac{\alpha}{2}$$

für alle $x \in S^{n-1}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ x^T A x > \alpha}}{\Longrightarrow} x^T B x > \alpha/2 > 0 \quad \forall x \in S^{n-1}$$

$$\Longrightarrow x^T B x = \|x\|^2 \cdot \left(\frac{x}{\|x\|}\right)^T B \left(\frac{x}{\|x\|}\right) > 0 \quad \forall x \neq 0,$$

d.h. B pos. definit. $\square$

Beweis Satz 3.45

$$f(a+h) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Taylor, Bem. 3.38}}}{=} f(a) + \overbrace{\langle \operatorname{grad} f(a), h \rangle}^{=0 \text{ nach Vor.}} + \frac{1}{2} \langle h, H_f(a+th) h \rangle \quad (*)$$

für geeignetes $t \in [0,1]$.

a) (b) analog) Sei $H_f(a)$ pos. definit.

Die Abb. $x \longmapsto H_f(x)$ ist stetig in a,

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \|a-x\| < \delta \Rightarrow \|H_f(a) - H_f(x)\| < \varepsilon$.

Wähle ε aus Lemma 3.48

$\underset{0 \leq t \leq 1}{\Longrightarrow} \exists \delta > 0$ so, dass $H_f(a+th)$ pos. def. für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\| < \delta$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} f(a+h) > f(a) \quad \forall \|h\| < \delta, \ h \neq 0.$

c) Sei $H_f(a)$ indefinit

$\Longrightarrow \exists\, h_1, h_2$ (o.B.d.A. $h_1, h_2 \in S^{n-1}$), so dass

$$\left.\begin{array}{l} \langle h_1, H_f(a) h_1 \rangle > 0, \\ \langle h_2, H_f(a) h_2 \rangle < 0 \end{array}\right\} \boxed{*}$$

Erweitere Bew. von Lemma 3.48, so dass $\forall B$ mit $\|A-B\| < \varepsilon$, die Eig. $\boxed{*}$ gilt (insb. sind h_1, h_2 unabh. von B)

$\underset{\text{wie a)}}{\Longrightarrow} \exists\, \delta_0 > 0$ so dass

$$\left\{\begin{array}{l} \langle h_1, H_f(a+th) h_1 \rangle > 0 \\ \langle h_2, H_f(a+th) h_2 \rangle < 0 \end{array}\right\} \quad \forall\, 0 < \|h\| < \delta_0$$

$$\underset{\|h_1\| = \|h_2\| = 1}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} \langle \tilde{h}_1, H_f(a+t\tilde{h}_1) \tilde{h}_1 \rangle > 0 \\ \langle \tilde{h}_2, H_f(a+t\tilde{h}_2) \tilde{h}_2 \rangle < 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \forall\, \tilde{h}_i = \delta h_i,\ i = 1,2 \\ \text{mit } 0 < \delta < \delta_0 \end{array}$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} f(a + \delta h_1) > f(a) \\ f(a + \delta h_2) < f(a) \end{array}\right\} \quad \forall\, 0 < \delta < \delta_0.$$

$\square$