MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
apl. Prof. Dr. D. Horstmann
Dr. C. Lange

Wintersemester 2016/2017
21. Dezember 2016

10. Übung zur Mathematik I für Biologen und Chemiker

Allgemeine Hinweise:

- Besprechung der Übung am 20. bzw. 21.01.2017 in den Übungen.
- Die Abgabe muss auf oben links zusammengetackerten DIN A4-Blättern erfolgen.
- Auf Ihrer Abgabe muss deutlich lesbar auf der obersten Seite Ihr Name und Ihre Übungsgruppennummer stehen.
- Die Aufgaben sind so zu bearbeiten, dass der Lösungsweg, die benutzten Formeln und die Rechnungen nachvollziehbar sind. Auch für Lösungen mit richtigen Ansätzen können Teilpunkte vergeben werden; eine Lösung ohne Rechenweg wird mit 0 Punkten bewertet.
- Weitere Informationen zu den Übungen finden Sie unter `http://www.mi.uni-koeln.de:8912`
- Informationen zur Vorlesung (z.B. Vorlesungsfolien) finden Sie unter `http://www.mi.uni-koeln.de/~dhorst`

Aufgabe 1. (11 Punkte, schriftlich) - Logarithmus -

(i) (3 Punkte) Wie lässt sich jede beliebige allgemeine Exponentialfunktion $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}$, mit Hilfe der (natürlichen) Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ darstellen?

(ii) (2 Punkte) Wie lässt sich jeder beliebige Logarithmus $f(x) = \log_a(x)$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $a \neq 1$, mit Hilfe des natürlichen Logarithmus zur Basis e, $f(x) = \ln(x)$, darstellen?

(iii) (3 Punkte) Beweisen Sie folgende Gleichung

$$\log_a(b) \cdot \log_b(u) = \log_a(u).$$

(iv) (3 Punkte) Lösen Sie mit Hilfe der Rechenregeln für den Logarithmus die Gleichung

$$\log_2(x+2) + 2\log_4(x) = 6.$$

Aufgabe 2. (10 Punkte, schriftlich) - Differenzenquotient, Ableitung, Monotonie -

(i) (5 Punkte) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der Ableitung (Differenzenquotient), dass für $f(x) = 3x^2$ gilt $f'(x) = 6x$.

(ii) (5 Punkte) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten der Funktion $y(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$, d.h. geben Sie die Bereiche an, in denen die Funktion monoton wächst bzw. fällt.

Aufgabe 3. (9 Punkte, schriftlich) - Differentiationsregeln -

Bestimmen Sie jeweils die Ableitung der folgenden Funktionen. Geben Sie jeweils an, an welchen Stellen und mit welchen Funktionen Sie die Produkt-, Ketten- und Quotientenregel verwenden.

(i) (1,5 Punkte) $u(x) = \dfrac{(x^2-2)(x-2)}{x-3}$

(ii) (1,5 Punkte) $h(x) = 3\,(\cos(x))^n$

(iii) (1,5 Punkte) $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

(iv) (1,5 Punkte) $r(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(v) (1,5 Punkte) $f(x) = -2\sin(x)e^{-x^2}$

(vi) (1,5 Punkte) $f(x) = \ln(\ln(x))$

Aufgabe 4. **(mündlich) - Anwendung zu Exponentialfunktion und Logarithmus -**

Die Halbwertszeit von radioaktivem Kohlenstoff ^{14}C beträgt 5730 Jahre. Ein Skelett, das aus einer Torfgrube geborgen wurde, wird von Wissenschaftlern untersucht, um das Alter des Skeletts zu bestimmen. Sie messen, dass 65% des ursprünglichen Kohlenstoff ^{14}C im Skelett zerfallen sind. Berechnen Sie das wahrscheinliche Alter des Skeletts. Geben Sie hierfür die Formel für die Menge an Kohlenstoff ^{14}C im Skelett in Abhängigkeit der Zeit t (in Jahren) an.

Aufgabe 5. **(mündlich) - Differentialrechnung und Konvexität -**

Überprüfen Sie mit dem Kriterium aus der Differentialrechnungen, welches Sie in der Vorlesung gelernt haben, ob die folgenden Funktionen auf den angegebenen Bereichen konvex sind.

(i) $f(x) = x^4 - x$ auf $\mathbb{R}$.

(ii) $f(x) = -\ln(x)$ auf $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$.

(iii) $f(x) = -e^{-x^2}$.

(iv) $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $\mathbb{R}_{>0}$.

Schöne Ferien, frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Jahr 2017!