MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
apl. Prof. Dr. D. Horstmann
Dr. C. Lange

Wintersemester 2016/2017
1. Februar 2017

14. Übung zur Mathematik I für Biologen und Chemiker

Semesterferien-Uebungsblatt

Keine Abgabe dieser Übung!

Allgemeine Hinweise:

- Diese Übung ist nur mündlich vorzubereiten und wird in der ersten Übung im neuen Semester besprochen.
- Details zu Orten, Zeiten und der Gruppen-Einteilung werden in der ersten Vorlesungswoche in der jeweiligen Vorlesung besprochen.

Aufgabe 1. (mündlich)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen. Geben Sie dabei jeweils an, welches Lösungverfahren Sie verwenden.

(i) $y'(x)x^3 = 2y(x) - 5$

(ii) $y''(t) + 6y'(t) = 2\cos(5t)$

(iii) $y'(x) + y(x) = \exp(-x)$, $y(0) = 1$.

(iv) $y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

Aufgabe 2. (mündlich)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des nachfolgenden homogenen Differentialgleichungssystems.

$$Y'(t) = A \cdot Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Y(t).$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor.

1. Zeigen Sie, dass ein Lösungsansatz der Form $Y_{homogen}(t) = e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ zum Lösen der Eigenwertgleichung $Ax = \lambda x$ führt. Leiten Sie dazu $Y_{homogen}$ nach t ab und setzten Sie es in die gegebene Differentialgleichung ein.

2. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

3. Die allgemeine Lösung ist dann eine Linearkombination der Form

$$Y_{allgemein}(t) = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix}}_{=:v_1} e^{\lambda_1 t} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}}_{=:v_2} e^{\lambda_2 t},$$

wobei c_1, c_2 Konstanten sind. λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ sind die Eigenwerte der Matrix A und v_1, $v_2 \in \mathbb{R}^2$ die zugehörigen Eigenvektoren. Geben Sie die allgemeine Lösung für das gegebene homogene System an.

Bestimmen Sie nun die allgemeine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$Y'(t) = A \cdot Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. **(mündlich)**

Rufen Sie sich das Modell der Entwicklung eines Waldes bestehend aus Buchen und Tannen aus Aufgabe 2 auf Blatt 6 in Erinnerung. In dieser Aufgabe wollen wir ein kontinuierliches Modell der Waldentwicklung betrachten. Seien $B(t)$ und $T(t)$ die Anzahl der Buchen und Tannen zum Zeitpunkt t in Jahren. Wir nehmen an, dass sich die Waldentwicklung durch eine Differentialgleichung der Form

$$\begin{pmatrix} B'(t) \\ T'(t) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} B(t) \\ T(t) \end{pmatrix}$$

mit einer 2×2 Matrix A beschreiben lässt. Die Matrix A sei so gewählt, dass die Lösungen dieser Differentialgleichung die gleiche jährliche Entwicklung des Waldbestandes beschreiben wie das Modell aus Aufgabe 2 auf Blatt 6. Wie sieht der Baumbestand bei den Anfangswerten $B(0) = 150$ und $T(0) = 350$ nach 200 Tagen aus?

Hinweise:

1. Nehmen Sie an, dass die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung wieder von der Form

$$\begin{pmatrix} B(t) \\ T(t) \end{pmatrix} = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix}}_{=:v_1} e^{\lambda_1 t} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}}_{=:v_2} e^{\lambda_2 t}$$

   ist.

2. Da die Lösung mit der Entwicklung im diskreten Modell übereinstimmen soll, d.h.

$$\begin{pmatrix} B(1) \\ T(1) \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} B(0) \\ T(0) \end{pmatrix}, \text{ mit } C = \begin{pmatrix} 0.9805 & 0,021 \\ 0,0195 & 0,979 \end{pmatrix}$$

   (vgl. Aufgabe 2, Blatt 6), muss für alle c_1 und c_2 gelten:

$$c_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} e^{\lambda_1} + c_2 \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} e^{\lambda_2} = C \left(c_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} \right).$$

   Bestimmen Sie aus dieser Bedingung λ_1 und λ_2 sowie Eigenvektoren v_1 und v_2 von C.

3. Bestimmen Sie nun eine Lösung, die den Anfangsbedingungen $B(0) = 150$ und $T(0) = 350$ genügt, und berechnen Sie den Baumbestand nach 200 Tagen.

Aufgabe 4. **(mündlich)**

(i) Ein großer Behälter B_1 mit einem Fassungsvermögen von 400 l wird mit Wasser gefüllt. Anschließend werden 14 kg Salz in dem Behälter aufgelöst. Einen anderen Behälter B_2 mit einem Fassungsvermögen von 600 l füllt man ebenfalls mit Wasser und löst hierin 10 kg Salz auf. Hiernach wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ damit begonnen pro Minute ständig 20 l Salzwasser von B_1 nach B_2 und 20 l von B_2 nach B_1 zu pumpen, die dann auch sofort verrührt werden. Wie groß ist der Salzgehalt $z_i(t)$ in $B_i (i \in \{1, 2\})$ zur Zeit t? Stabilisiert sich der Salzgehalt in den beiden Behältern auf ein einheitliches Niveau?

(ii) Wir nehmen nun an, dass beide Behälter B_1 und B_2 ein Fassungsvermögen von jeweils 400 l besitzen. Beide Behälter seien vollständig mit Wasser gefüllt, in dem 14 kg (in B_1) bzw. 8 kg (in B_2) aufgelöst seien. Nun leitet man zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ pro Minute 10 Liter einer Salzlösung der Konzentration $0,3$ kg/l in B_1 ein. Gleichzeitig werden 15 l/Minute von B_1 nach B_2, 5 l/Minute von B_2 nach B_1 herübergepumpt und 10 l/Minute aus B_2 in einen Abfluss gelenkt. Konvergiert die Salzkonzentration in B_i gegen eine einheitliche Konzentration? Wenn ja, dann geben Sie diese Konzentration an.