MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
apl. Prof. Dr. D. Horstmann
Dr. C. Lange

Wintersemester 2016/2017
26. Oktober 2016

2. Übung zur Mathematik I für Biologen und Chemiker

Allgemeine Hinweise:

- Abgabe der Übung: am 2.11.2016 direkt nach der Vorlesung.
- Besprechung der Übung am 10. bzw. 11.11.2016 in den Übungen.
- Die Abgabe muss auf oben links zusammengetackerten DIN A4-Blättern erfolgen.
- Auf Ihrer Abgabe muss deutlich lesbar auf der obersten Seite Ihr Name und Ihre Übungsgruppennummer stehen.
- Die Aufgaben sind so zu bearbeiten, dass der Lösungsweg, die benutzten Formeln und die Rechnungen nachvollziehbar sind. Auch für Lösungen mit richtigen Ansätzen können Teilpunkte vergeben werden; eine Lösung ohne Rechenweg wird mit 0 Punkten bewertet.
- Weitere Informationen zu den Übungen finden Sie unter http://www.mi.uni-koeln.de:8912

Aufgabe 1. (10 Punkte, schriftlich) - Mittelwert, Varianz, Standardabweichung -

Bei einer Straßenumfrage wurden folgende Datensätze über die Körpergröße (in cm) und die Schuhgröße von 8 Passanten erhoben:

Körpergröße	171	164	185	172	162	164	190	164
Schuhgröße	40	38	46	44	39	39	48	49

Tabelle 1: Datensatz Körper- und Schuhgröße

(i) (3 Punkte) Berechnen Sie das arithmetische Mittel der beiden Merkmale 'Körpergröße' und 'Schuhgröße'.

(ii) (4 Punkte) Berechnen Sie die Varianz der Körper- sowie der Schuhgröße jeweils auf zwei verschiedene Arten: mittels der Formel aus der Definition der Varianz und mit Hilfe des 'Verschiebungssatzes'.

(iii) (3 Punkte) Berechnen Sie die Standardabweichung beider Messreihen.

Aufgabe 2. (5 Punkte, schriftlich) - Boxplot -

Bei einer Untersuchung zur Lebensdauer von *Drosophila melanogaster* (Schwarzbäuchige Fruchtfliege) wurden folgende Lebensspannen (in Tagen) einzelner Individuen gemessen

8, 11, 43, 12, 37, 35, 13, 35, 7, 11, 42, 41, 10.

Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die Varianz der Datenreihe und stellen Sie die Ergebnisse in einem Boxplot graphisch dar.

Freiwillige Zusatzfrage: Lassen die Daten eine weitere Beobachtung zu?

Bitte wenden.

Aufgabe 3. **(10 Punkte, schriftlich) - Beweismethoden -**

(i) (5 Punkte) Zeigen Sie mit Hilfe des indirekten Beweises die folgende Aussage: 'Wenn das Quadrat einer natürlichen Zahl gerade ist, so ist es auch die Zahl selbst'.

(ii) (5 Punkte) Zeigen Sie mit Hilfe des direkten Beweises die folgende Aussage: 'Wenn eine natürliche Zahl gerade ist, dann ist es auch ihr Quadrat.'

Aufgabe 4. **(5 Punkte, schriftlich) - direkter Beweis -**

(5 Punkte) Benutzen Sie die Methode des direkten Beweises um folgende Aussage zu zeigen:

Für beliebige positive natürliche Zahlen $m,n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \geq 2.$$

Hinweis: Starten Sie mit der Aussage $(m-n)^2 \geq 0$ und leiten Sie hieraus obige Ungleichung ab.
Zusatzfrage (+2 Punkte): Gilt auch

$$r + \frac{1}{r} \geq 2$$

für jede positive reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$?

Aufgabe . (mündlich) **- indirekter Beweis -**

Machen Sie sich die Methode des indirekten Beweises noch einmal deutlich, indem Sie den Beweis zu $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ aus der Vorlesung nachvollziehen. Funktioniert der Beweis auch für andere ganze Zahlen, z.B. 3 oder 6?

Aufgabe 6. **(+3 Punkte, freiwillig) - indirekter Beweis für Spezialisten -**

Es seien m und n natürliche Zahlen. Die Zahl m heißt *Teiler von n*, wenn es eine natürliche Zahl s gibt, sodass $n = m \cdot s$ gilt. Eine natürliche Zahl n heißt *Primzahl*, wenn sie genau zwei Teiler hat. Die Liste der Primzahlen beginnt mit $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$. In dieser Aufgabe soll mit Hilfe der Technik des Widerspruchsbeweis folgende Aussage bewiesen werden:

Behauptung: Es gibt unendlich viele verschiedene Primzahlen.

Gehen Sie dazu wie folgt vor.

1. Nehmen Sie an, dass es nur endlich viele verschiedene Primzahlen gibt. Bezeichnen Sie diese der Größe nach aufsteigend mit $p_1, \ldots, p_N$.
2. Definieren Sie $p := 1 + \prod_{i=1}^N p_i = 1 + p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_N$ (hierbei bezeichnet $\prod_{i=1}^N p_i$ also das Produkt der Primzahlen p_1 bis p_N) und zeigen Sie $p_i < p$ für alle $i = 1, \ldots, N$, d.h. ihre neue Zahl p ist größer als jede Primzahl.
3. Zeigen Sie, dass keine der Primzahlen p_1 bis p_N ein Teiler von p ist.
4. Folgern Sie, dass p eine Primzahl ist.
5. Erklären Sie, warum dies ein Widerspruch ist und folgern Sie die Behauptung.

Bemerkung: Dieser Beweis taucht bereits in Euklids *Die Elemente* aus dem 4. Jahrhundert vor Christus auf.