MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
apl. Prof. Dr. D. Horstmann
Dr. C. Lange

Wintersemester 2016/2017
2. November 2016

3. Übung zur Mathematik I für Biologen und Chemiker

Allgemeine Hinweise:

- Abgabe der Übung: am 9.11.2016 direkt nach der Vorlesung.
- Besprechung der Übung am 17. bzw. 18.11.2016 in den Übungen.
- Die Abgabe muss auf oben links zusammengetackerten DIN A4-Blättern erfolgen.
- Auf Ihrer Abgabe muss deutlich lesbar auf der obersten Seite Ihr Name und Ihre Übungsgruppennummer stehen.
- Die Aufgaben sind so zu bearbeiten, dass der Lösungsweg, die benutzten Formeln und die Rechnungen nachvollziehbar sind. Auch für Lösungen mit richtigen Ansätzen können Teilpunkte vergeben werden; eine Lösung ohne Rechenweg wird mit 0 Punkten bewertet.
- Weitere Informationen zu den Übungen finden Sie unter http://www.mi.uni-koeln.de:8912

Aufgabe 1. (12 Punkte, schriftlich) - vollständige Induktion -

Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion die nachfolgenden Aussagen:

(i) (6 Punkte) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(ii) (6 Punkte) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Aufgabe 2. (8 Punkte, schriftlich) - vollständige Induktion und Binomialkoeffizient I -

Beweisen sie nachfolgende Gleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$:

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}.$$

Hinweis: Führen Sie eine vollständige Induktion nach n durch. Im Induktionsschritt muss eine Fallunterscheidung vorgenommen werden.

Aufgabe 3. (10 Punkte, schriftlich) - vollständige Induktion und Binomialkoeffizienten II -

Aus dem Binomischen Lehrsatz lassen sich folgende Identitäten ableiten.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

und

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0.$$

(i) (2 Punkte) Zeigen Sie, inwiefern diese beiden Aussagen aus dem Binomischen Lehrsatz folgen.

(ii) (8 Punkte) Beweisen Sie die erste Aussage nun ohne Benutzung des Binomischen Lehrsatzes mithilfe des Beweisprinzips der vollständigen Induktion.

(iii) *Freiwillige Zusatzfrage:* Finden Sie heraus was ein *Galton Brett* ist und interpretieren Sie die Binomialkoeffizienten als Anzahl möglicher Wegen auf einem solchen Brett. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel ganz links landet? Warum folgt daraus die erste Aussage?

Aufgabe 4. **(mündlich) - binomische Formeln und Faktorisierung-**

Stellen Sie mit Hilfe der binomischen Formeln die folgenden Terme als Produkte dar.

(i) $5x^2 + 3xy + y^2 + xy - x^2$

(ii) $5b^2 + 1 - 9b^2$

(iii) $16x^2 - 72xy + 81y^2$

(iv) $(2xy + 3z)^2 - 12xyz - 18z^2$

(v) $-4x^2 - 12xy - 9y^2$

Aufgabe 5. **(mündlich) - Trugschluss bei vollständiger Induktion -**

Ein Blick auf die Straße zeigt, dass folgende Aussage falsch zu sein scheint. Trügt Sie der Schein oder gibt es einen Fehler im Beweis?

Behauptung: Alle Autos haben die gleiche Farbe.

Beweis. Wir zeigen per Induktion folgende Aussage (A_n) für jede natürliche Zahl n:

Aussage (A_n): Eine Reihe bestehend aus n Autos ist einfarbig, d.h. alle Autos in dieser Reihe haben dieselbe Farbe.

- *Induktionsanfang*: Falls die Reihe nur aus einem Auto besteht, so ist diese trivialerweise einfarbig und die Aussage (A_1) somit richtig.
- *Induktionsannahme*: Wir nehmen an, dass die Aussage (A_n) für eine natürliche Zahl n richtig ist.
- *Induktionsbehauptung*: Wir behaupten, dass die Aussage (A_{n+1}) richtig ist.
- *Induktionsschritt*: Wir beweisen die Induktionsbehauptung unter der Induktionsannahme. Gegeben sei eine Reihe aus $n+1$ Autos. Entfernen wir das erste Auto aus der Reihe, so erhalten wir eine Reihe aus n Autos. Nach Induktionsannahme haben alle Autos in dieser Reihe die gleiche Farbe. Entfernen wir statt des ersten das letzte Auto der Reihe, so erhalten wir ebenfalls eine Reihe aus n Autos. Wieder nach Induktionsannahme haben auch alle Autos in dieser Reihe die gleiche Farbe. Daher hat das erste Auto der Reihe die gleiche Farbe wie ein Auto in der Mitte der Reihe, welches wiederum die gleiche Farbe hat wie das letzte Auto der Reihe. Folglich haben alle Autos in einer Reihe bestehend aus n+1 Autos die gleiche Farbe.
- *Induktionsschluss*: Es folgt, dass jede Reihe aus endlich vielen Autos einfarbig ist. Insbesondere haben alle Autos die gleiche Farbe.