

4. Übung zur Mathematik I für Biologen und Chemiker

Allgemeine Hinweise:

- Abgabe der Übung: am 16.11.2016 direkt nach der Vorlesung.
- Besprechung der Übung am 24. bzw. 25.11.2016 in den Übungen.
- Die Abgabe muss auf oben links zusammengetackerten DIN A4-Blättern erfolgen.
- Auf Ihrer Abgabe muss deutlich lesbar auf der obersten Seite Ihr Name und Ihre Übungsgruppennummer stehen.
- Die Aufgaben sind so zu bearbeiten, dass der Lösungsweg, die benutzten Formeln und die Rechnungen nachvollziehbar sind. Auch für Lösungen mit richtigen Ansätzen können Teilpunkte vergeben werden; eine Lösung ohne Rechenweg wird mit 0 Punkten bewertet.
- Weitere Informationen zu den Übungen finden Sie unter <http://www.mi.uni-koeln.de:8912>

Aufgabe 1. (10 Punkte, schriftlich) - vollständige Induktion und Fibonacci-Zahlen -

Die Fibonacci-Folge F_n , $n \in \mathbb{N}$, ist wie folgt definiert:

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \text{ für } n \geq 2.$$

Es gilt also

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, \dots$$

Beweisen Sie per vollständiger Induktion über n die Gleichung

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Hinweis: Wie sehen die Nullstellen von $x^2 - x - 1$ aus?

Aufgabe 2. (8 Punkte, schriftlich) - Mengen -

Welche der folgenden Mengen ist nach oben bzw. nach unten beschränkt? Geben Sie, soweit möglich, auch das Infimum und das Supremum sowie ggf. auch das Minimum und Maximum der Mengen an.

- | | | | |
|---|---------------------------------------|--|---|
| (i) $\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ | (iii) $\{x^4 \mid x \in \mathbb{R}\}$ | (v) $\{3x - 6 \mid x \in \mathbb{R}\}$ | (vii) $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}, a > 0\}$ |
| (ii) $\{3^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ | (iv) $\{x^5 \mid x \in \mathbb{R}\}$ | (vi) $\{-3, -2, 1, 4, 8, 9\}$ | (viii) $\left\{ \frac{1}{1+n^3} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ |

Aufgabe 3. (6 Punkte, schriftlich) - Betrag und Ungleichungen -

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen.

- (i) (2 Punkte) $x + |x - 1| \geq -3$
- (ii) (2 Punkte) $|2x + 6| \leq 8$
- (iii) (2 Punkte) $x^5 < x^3$

Aufgabe 4. (6 Punkte, schriftlich) - Polynomdivision -

Führen Sie die folgenden Polynomdivisionen durch.

(i) (2 Punkte) $(x^3 - 3x + 2) : (x - 1)$

(ii) (2 Punkte) $(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 6) : (x - 2)$

(iii) (2 Punkte) $(6x^6 + x^4c + 25c^3) : (3x^2 + 5c)$

Aufgabe 5. (mündlich) - Nullstellen bestimmen -

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen.

(i) $2x + 5 = 0$

(iv) $x^3 - 3x + 2 = 0$

(ii) $5x^2 - 4x - 1 = 0$

(v) $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

(iii) $3x^2 - 3x = 0$

(vi) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Aufgabe 6. (mündlich) - Vollständige Induktion -

Beweisen Sie per vollständiger Induktion über n die nachfolgende Aussage.

Für alle $n \in \mathbb{N}$, $a > -1$ gilt:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

An welcher Stelle wird die Voraussetzung $a > -1$ benötigt?