MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
apl. Prof. Dr. D. Horstmann
Dr. C. Lange

Wintersemester 2016/2017
23. November 2016

6. Übung zur Mathematik I für Biologen und Chemiker

Allgemeine Hinweise:

- Abgabe der Übung: am 30.11.2016 direkt nach der Vorlesung.
- Besprechung der Übung am 1. bzw. 2.11.2016 in den Übungen.
- Die Abgabe muss auf oben links zusammengetackerten DIN A4-Blättern erfolgen.
- Auf Ihrer Abgabe muss deutlich lesbar auf der obersten Seite Ihr Name und Ihre Übungsgruppennummer stehen.
- Die Aufgaben sind so zu bearbeiten, dass der Lösungsweg, die benutzten Formeln und die Rechnungen nachvollziehbar sind. Auch für Lösungen mit richtigen Ansätzen können Teilpunkte vergeben werden; eine Lösung ohne Rechenweg wird mit 0 Punkten bewertet.
- Weitere Informationen zu den Übungen finden Sie unter http://www.mi.uni-koeln.de:8912

Aufgabe 1. **(8 Punkte, schriftlich) - lineare Gleichungssysteme und Matrizen I -**

Geben Sie die in den Aufgaben 1, 2 und 3 der 5. Übung gegebenen Gleichungssysteme in Matrixschreibweise an. Das heißt bringen Sie die Gleichungssysteme in die Form $Ax = b$ mit einer $(n \times m)$-Matrix A, einem Vektor $x \in \mathbb{R}^m$ und einem Vektor $b \in \mathbb{R}^n$. Geben Sie auch jeweils die Werte für n und m an.

Aufgabe 2. **(12 Punkte, schriftlich) - lineare Gleichungssysteme und Matrizen II -**

Ein Wald bestehe nur aus Buchen und Tannen. Mit B_t sei die Anzahl an Buchen und mit T_t die Anzahl an Tannen in dem Wald im Jahr t bezeichnet. Wenn ein Baum stirbt, so wachse ein neuer Baum an derselben Stelle, doch kann dieser durchaus einer anderen Baumspezies angehören als der abgestorbene Baum. Wir nehmen im speziellen an, dass Buchen relativ gesehen länger leben und nur 3% des Buchenbestandes in einem Jahr stirbt. Andererseits nehmen wir an, dass 6% des Tannenbestandes in einem Jahr absterben. Da Tannen jedoch schneller als Buchen wachsen, werden an frei werdenden Baumstandorten eher Tannen wachsen. Wir nehmen also weiter an, dass 65% der frei werdenden Baumstandorte von Tannen besetzt werden und nur 35% von Buchen.

(i) (4 Punkte) Geben Sie ein Gleichungssystem an, mit dem sich der Wald bzw. die jeweiligen Baumanzahlen im Jahr $t+1$ beschreiben lässt bzw. lassen.

(ii) (1 Punkte) Schreiben Sie Ihr Gleichungssystem aus **(i)** nun in Matrixschreibweise.

(iii) (2 Punkte) Geben Sie mithilfe von **(ii)** in Matrixschreibweise an, wie sich der Wald bzw. die jeweiligen Baumanzahlen im Jahr $t+n$ in Abhängigkeit der Baumanzahlen im Jahr t beschreiben lässt bzw. lassen!

(iv) (1 Punkte) Wie sieht der Baumbestand im Jahr 3 aus, wenn $B_1 = 150$ und $T_1 = 350$ sind?

(v) (2 Punkte) Wie viele Bäume stehen insgesamt im Wald nach 100 Jahren?

(vi) (2 Punkte) Wird eine der Baumarten im Wald irgendwann aussterben?

Allgemeiner Hinweis zum Runden: Bitte runden Sie soweit nicht explizit anders angegeben 'sinnvoll', z.B. soll bei Geldbeträgen auf 2 Nachkommastellen (also auf den Cent genau) gerundet werden, bei Personen auf ganze Zahlen. In dieser Aufgabe soll - auch wenn es eigentlich nur ganze Bäume gibt - auf 2 Nachkommastellen gerundet werden.

Aufgabe 3. **(10 Punkte, schriftlich) - Rechnen mit Matrizen -**

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie falls möglich:

(i) $A \cdot B$, **(ii)** $B \cdot A$, **(iii)** $C^T + D$, **(iv)** $(E \cdot F)^T$, **(vii)** $C \cdot D$

Aufgabe 5. **(mündlich) - Rechengesetze für Matrizen -**

Es seien A, B, C drei reelle $(n \times n)$-Matrizen. Wir wollen überprüfen, ob die für die reellen Zahlen gültigen Rechengesetze auch für Matrizen gelten:

(I) Kommutativgesetz

(a) der Matrizenaddition: $A + B \stackrel{?}{=} B + A$,

(b) der Matrizenmultiplikation: $A \cdot B \stackrel{?}{=} B \cdot A$,

(II) Assoziativgesetz

(a) der Matrizenaddition: $A + (B + C) \stackrel{?}{=} (A + B) + C$,

(b) der Matrizenmultiplikation: $A \cdot (B \cdot C) \stackrel{?}{=} (A \cdot B) \cdot C$,

(III) Distributivgesetz:

(a) $A \cdot (B + C) \stackrel{?}{=} A \cdot B + A \cdot C$,

(b) $(A + B) \cdot C \stackrel{?}{=} A \cdot C + B \cdot C$.

Für (1×1)-Matrizen gelten diese Gesetze natürlich, denn reelle (1×1)-Matrizen sind offensichtlich „normale“ reelle Zahlen.

(i) Überprüfen Sie die obigen Gesetze nun für den Fall $n = 2$, d.h. setzen Sie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

und testen Sie, ob die jeweiligen Rechengesetze für diese (2×2)-Matrizen im Allgemeinen gelten.

(ii) Geben Sie ein konkretes Zahlenbeispiel an, für das das Kommutativgesetz der Matrizenmultiplikation nicht gilt.