MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
apl. Prof. Dr. D. Horstmann
Dr. C. Lange

Wintersemester 2016/2017
14. Dezember 2016

9. Übung zur Mathematik I für Biologen und Chemiker

Allgemeine Hinweise:

- Abgabe der Übung: am 21.12.2016 direkt nach der Vorlesung.
- Besprechung der Übung am 12. bzw 13. Januar in den Übungen.
- Die Abgabe muss auf oben links zusammengetackerten DIN A4-Blättern erfolgen.
- Auf Ihrer Abgabe muss deutlich lesbar auf der obersten Seite Ihr Name und Ihre Übungsgruppennummer stehen.
- Die Aufgaben sind so zu bearbeiten, dass der Lösungsweg, die benutzten Formeln und die Rechnungen nachvollziehbar sind. Auch für Lösungen mit richtigen Ansätzen können Teilpunkte vergeben werden; eine Lösung ohne Rechenweg wird mit 0 Punkten bewertet.
- Weitere Informationen zu den Übungen finden Sie unter http://www.mi.uni-koeln.de:8912

Aufgabe 1. (8 Punkte, schriftlich) - Lagrange Polynom -

Bestimmen Sie das Lagrange-Polynom, das die Punkte $P_0 = (0,1)$, $P_1 = (1,2)$ und $P_2 = (2,4)$ interpoliert. Geben Sie das gesuchte Polynom in der Form $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ an.

Aufgabe 2. (10 Punkte, schriftlich) - Verhalten von Funktionen I -

(i) (2 Punkte) Geben Sie eine Funktion an, die sowohl monoton fallend als auch monoton wachsend ist und beweisen Sie beide Eigenschaften für diese Funktion.

(ii) (4 Punkte) Zeigen Sie dass für zwei konkave Funktionen f und g auch $f+g$ konkav ist. Hierbei gilt: $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$.

(iii) (4 Punkte) Zeigen Sie dass $f(x) = 2x - 6$ eine Umkehrfunktion besitzt und bestimmen Sie diese. Machen Sie auch eine Probe Ihres Ergebnisses.

Aufgabe 3. (12 Punkte, schriftlich) - Exponentialfunktion -

Die Population von wilden Waschbären im Yosemite Nationalpark erhöht sich in 6 Jahren von 2000 auf 3000.

(i) (3 Punkte) Geben Sie die Population zum Zeitpunkt t als eine Funktion $N(t)$ an, wobei die Funktion die Gestalt $N(t) = N_0 \cdot \exp(\lambda \cdot t)$ habe.

(ii) (3 Punkte) Berechnen Sie wie groß die Population am Ende des zweiten Jahres war und wie lange es dauert bis sich die Population verdoppelt.

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf.

(iii) (2 Punkte) $6e^{2x} - 2e^x = 0$ **(iv)** (2 Punkte) $2e^x - \frac{e}{4} + 2 = 0$ **(v)** (2 Punkte) $x^2 e^x e^x - 4x^2 = 0$

Hinweise:

1. $e^x = y$ gilt genau dann, wenn $x = \ln(y)$ gilt.
2. e^x und $\exp(x)$ werden synonym verwendet.

Aufgabe 4. **(mündlich) - Definitions- und Wertebereiche von Funktionen -**

Geben Sie den Definitions- und Wertebereich der folgenden Funktionen an.

(i) $f(x) = (x+1)/(x-1)$.

(ii) $g(x) = (x^2-1)/(x^2-1)$.

(iii) $h(x) = 1/(x^3-3x^2)$.

Aufgabe 5. **(mündlich) - Verhalten von Funktionen II -**

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$L(t) = \frac{1}{2+5\exp(-\lambda t)}, \quad \text{mit } \lambda > 0$$

monoton wachsend ist, und dass $L(t) \to \frac{1}{2}$ für $t \to \infty$ und $L(t) = \frac{1}{7}$ für $t \to 0$.