Elementare Zahlentheorie

Übungsblatt 12 Lösung

Aufgabe 10. Bestimmen Sie alle geraden vollkommenen Zahlen der Form $a^a + 1$, $a \in \mathbb{N}$.

Lösung. Damit $a^a + 1$ gerade ist, ist zwingend a ungerade. Wir können dann schreiben

$$a^a + 1 = (a + 1)(a^{a-1} - a^{a-2} + ... - a + 1).$$

Hierbei ist wieder $a + 1$ gerade und $b := a^{a-1} - a^{a-2} + ... - a + 1$ ungerade, da b die Summe einer ungeraden Anzahl ungerader Zahlen ist. Weil $a + 1$ gerade ist, können wir $a + 1 = 2^s u$ für ein $s \in \mathbb{N}$ und $u \in \mathbb{N}$ ungerade schreiben. Ist nun $n = a^a + 1$ eine gerade vollkommene Zahl, so gilt nach dem Satz von Euler-Euklid $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ für ein $p \in \mathbb{P}$, so dass auch $2^p - 1 \in \mathbb{P}$ gilt. Insgesamt erhalten wir also

$$2^s ub = 2^{p-1}(2^p - 1).$$

Da ub und $2^p - 1$ ungerade sind, muss wegen der eindeutigen Primfaktorzerlegung $ub = 2^p - 1$ gelten, also haben wir wegen $2^p - 1 \in \mathbb{P}$ entweder $u = 1$ oder $b = 1$. Für $b = 1$ ergibt sich sofort $a = 1$, also $n = 2$, was nicht vollkommen ist, so dass $u = 1$ gelten muss. Wir erhalten also $a + 1 = 2^s = 2^{p-1}$. Setzen wir dies ein, so erhalten wir die Gleichung

$$a^a + 1 = (a + 1)(2a + 1),$$

oder äquivalent

$$a^{a-1} = 2a + 3.$$

Damit ist aber a ein Teiler von 3, also gilt, da wir $a = 1$ bereits ausgeschlossen haben, $a = 3$ und $n = 28$, was damit die einzige gerade vollkommene Zahl der angegebenen Form ist. □

Aufgabe 13. Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ teilerfremd und $c \neq 0$. Zeigen Sie, dass dann ein $x \in \mathbb{Z}$ existiert mit

$$\mathrm{ggT}(a + bx, c) = 1.$$

Lösung. Man wähle

$$x := \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \mid c, p \nmid a}} p.$$

Ist dann q ein Primteiler von c, der auch a teilt, so kann q weder b (wegen der Teilerfremdheit) noch x (nach Konstruktion) teilen, teilt also nicht $a + bx$. Teilt q c und b, so kann q wieder wegen der Teilerfremdheit kein Teiler von a sein, so dass auch hier $q \nmid (a + bx)$ gilt. Teilt q c, aber weder a noch b, so teilt q x nach Konstruktion, kann aber dann wegen $q \nmid a$ nicht die Summe $a + bx$ teilen. Es gibt also keine Primzahl q, die c und $a + bx$ teilt, also folgt $\mathrm{ggT}(a + bx, c) = 1$. $\square$