Aufgabe 1

(a) Seien M, N nichtleere Mengen und $A\colon M \to N$ eine surjektive Abbildung. Zeigen Sie, dass es eine injektive Abbildung $B\colon N \to M$ gibt mit $A \circ B = \mathrm{Id}_N$. [10 Punkte]

(b) Geben Sie ein Beispiel für nichtleere Mengen M, N und eine surjektive Abbildung $A\colon M \to N$, so dass es *keine* Abbildung $C\colon N \to M$ gibt mit $C \circ A = \mathrm{Id}_M$. [4 Punkte]

(c) Sei M eine unendliche und N eine nichtleere Menge.
Zeigen Sie, dass $M \times N$ eine unendliche Menge ist. [6 Punkte]

Aufgabe 1

(a) $A \subset M \times N$ ist

Abbildung, dh. $\forall m \in M \; \exists! n \in N$ mit $(m,n) \in A$ 1

surjektiv, dh $\forall n \in N \; \exists m \in M$ mit $(m,n) \in A$. 1

Wir nutzen die Surjektivität und wählen zu $n \in N$ ein $m_n \in M$ aus mit $(m_n, n) \in A$. Setze $B = \{(n, m_n) : n \in N\} \subset N \times M$. 2

(1) B ist Abbildung, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ $\exists\, m = m_n$ mit $(n,m) \in B$ und wenn $(n,m), (n,m') \in B$, so ist $m = m_n = m'$. 2

(2) B ist injektiv, da aus $(n,m), (n',m) \in B$ folgt $(m,n) \in A$ und $(m,n') \in A$ $\Rightarrow n' = n$ da A Abbildung. 2

(3) $A \circ B = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$, da

$$A \circ B = \{ (n_1, n_2) : \exists\, m \in M \text{ mit } (n_1, m) \in B,\ (m, n_2) \in A \}$$

$$= \{ (n_1, n_2) : (n_1, m_{n_1}) \in B,\ (m_{n_1}, n_2) \in A \}$$

$$= \{ (n_1, n_2) : (m_{n_1}, n_2) \in A \}$$

Da immer $(m_{n_1}\ n_1) \in A$ und A eine Abbildung ist, folgt aus $(m_{n_1}, n_2) \in A$ dass $n_1 = n_2$. Aus $n_1 = n_2$ folgt natürlich auch $(m_{n_1}, n_2) \in A$. Also ist

$$A \circ B = \{ (n_1, n_2) : n_1 = n_2 \} \quad 2$$
$$= \mathrm{Id}_N .$$

(b)

$M = \{1, 2\}$, $N = \{1\}$

$A : M \to N$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 1$ 2

ist surjektive Abbildung.

Es gibt zwei Abbildungen

$C_1, C_2 : N \to M$ 1

nämlich $C_1 = \{(1,1)\}$, $C_2 = \{(1,2)\}$.

Es gilt

$$C_1 \circ A = \{(1,1)\} \neq \mathrm{id}_M \qquad 1$$

$$C_2 \circ A = \{(1,1)\} \neq \mathrm{id}_M.$$

(c) M ist unendlich

$\Leftrightarrow$ $\exists\, A: M \to M$ injektiv 1

aber nicht surjektiv.

Wir definieren

$$A': M \times N \to M \times N$$

$$(m,n) \mapsto (A(m),n) \qquad 2$$

Die Abbildung ist injektiv,

denn $A'(m,n) = A'(\tilde{m},\tilde{n})$ 1

$\Rightarrow \quad A(m) = A(\tilde{m})$

$\Rightarrow \quad m = \tilde{m}$, da A injektiv.

Die Abbildung ist nicht surjektiv,

denn $\exists\ m' \in M$ so dass

A nicht surjektiv

$A(m) \neq m' \quad \forall\, m \in M.$ 2

Wähle $n' \in N$ beliebig. Dann ist

$N \neq \emptyset$

$A'((m,n)) = (A(m), n) \neq (m', n')$

für alle $(m, n) \in M \times N$.

Aufgabe 2 Sei $a < b$ und $f\colon [a,b] \to [a,b]$ eine stetige Abbildung.
Ein $x \in [a,b]$ heißt *Fixpunkt* von f, wenn $f(x) = x$.

(a) Zeigen Sie, dass es eine monoton wachsende Folge (a_n) und eine monoton fallende Folge (b_n) in $[a,b]$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

- $f(a_n) \geq a_n$ und $f(b_n) \leq b_n$.
- $b_n - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a)$.

[5 Punkte]

(b) Folgern Sie, dass die Folge (a_n) gegen einen Fixpunkt $x \in [a,b]$ von f konvergiert.

[5 Punkte]

(c) Benutzen Sie die in (a) konstruierten Folgen, um ein $x \in [0,1]$ zu finden mit

$$x = x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{16}x + \frac{15}{64}.$$

Erklären Sie Ihr Vorgehen! [5 Punkte]

(d) Geben Sie ein Beispiel einer Abbildung $f\colon [0,1] \to [0,1]$, die keinen Fixpunkt $x \in [0,1]$ besitzt. [5 Punkte]

Aufgabe 2:

(a) Induktion, für $n=0$ wähle $a_0=a$, $b_0=b$. Dann ist $f(a_0) \in [a,b]$ und 1
somit $f(a_0) \geq a_0$ und $f(b_0) \leq b_0$ ist analog. Seien nun a_{n-1}, b_{n-1} konstruiert mit $f(a_{n-1}) \geq a_{n-1}$ und $f(b_{n-1}) \leq b_{n-1}$, sowie $a_{n-1} \leq b_{n-1}$.

Setze $m_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$. Dann ist 1

$a_{n-1} \leq m_n \leq b_{n-1}$.

1. Fall: wenn $f(m_n) \geq m_n$, so

setze $a_n := m_n$ und $b_n := b_{n-1}$. 1

Dann ist $f(b_n) = f(b_{n-1}) \leq b_{n-1} = b_n$

und $f(a_n) = f(m_n) \geq m_n = a_n$. 1

Auch $a_n = m_n \geq a_{n-1}$, $b_n \geq b_{n-1}$

und

$$b_n - a_n = b_{n-1} - m_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a)$$ 1

nach Induktionsannahme.

2. Fall: $\quad f(m_n) < m_n$ so seze

$b_n = m_n, \; a_n = a_{n-1}$ und es gilt

$f(b_n) \leq b_n, \; f(a_n) \geq a_n$

$a_{n+1} \geq a_n, \; b_{n+1} \leq b_n$

und $\quad b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$

wie zuvor.

(b) $\quad (a_n)$ ist monoton wachsend und (durch b) nach oben beschränkt, also konvergent. 1

(b_n) ist monoton fallend und durch a nach unten be- 1
schränkt also konvergent.

$(b_n - a_n)$ konvergiert gegen null, da $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ gegen 1
null konvergiert.

Ist nun $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$,
$b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

So folgt $a - b = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - b_n = 0$,
also $a = b$. 1

Dann gilt, da f stetig,

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \geq \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$= a = b = \lim_{n\to\infty} b_n$$ 1

$$\geq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(b) = f(a)$$

$\Rightarrow$ $f(a) = a$, dh a ist Fixpunkt.

(c) Setze $f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{16}x + \frac{15}{64}$. 1

$a_0 = 0$, $b_0 = 1$ wende den Algorithmus auf f an. 1

$m_1 = \frac{1}{2}$, dann gilt

$$f(m_1) = \frac{1}{8} - \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \frac{15}{64}$$ 1

$$= \frac{8 - 12 + 6 + 15}{64} = \frac{17}{64} < \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \; a_1 = 0, \; b_1 = \frac{1}{2}$ 1

$m_2 = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{64} - \frac{3}{64} + \frac{3}{64} + \frac{15}{64}$$

$$= \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ also ist $x = \frac{1}{4}$ Fixpunkt. 1

(d) $f : [0,1] \to [0,1]$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{wenn } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$ 5

hat offensichtlich keinen Fixpunkt.

Aufgabe 3 Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ definiere

$$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x < b\}.$$

Sei $f \colon [a, b[\to \mathbb{R}$ eine *differenzierbare* Funktion. Betrachten Sie die folgenden fünf möglichen Eigenschaften von f.

(a) Für alle $x \in [a, b[$ gilt $f'(x) > 0$.

(b) f ist streng monoton wachsend.

(c) f ist nach unten beschränkt,
d.h. es existiert ein $u \in \mathbb{R}$ mit $u \leq f(x)$ für alle $x \in [a, b[$.

(d) f ist stetig.

(e) f ist monoton wachsend.

Tragen Sie in die folgende Tabelle ein, ob jedes *differenzierbare* f mit der Eigenschaft, die die jeweilige Zeile markiert, die Eigenschaft, die die jeweilige Spalte markiert, besitzt. Schreiben Sie w für wahr oder f für falsch in die entsprechenden Tabellenpositionen.

		$\Rightarrow$ (a)	$\Rightarrow$ (b)	$\Rightarrow$ (c)	$\Rightarrow$ (d)	$\Rightarrow$ (e)
(a)	$\Rightarrow$	w				
(b)	$\Rightarrow$		w			
(c)	$\Rightarrow$			w		
(d)	$\Rightarrow$				w	
(e)	$\Rightarrow$					w

[1 Punkt für jede korrekte Antwort]

	a	b	c	d	e
a	W	W	W	W	W
b	f	W	W	W	W
c	f	f	W	W	f
d	f	f	f	W	f
e	f	f	W	W	W

Aufgabe 4 Sei $a > 0$ und $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x}} - \sqrt{ax} & \text{wenn } x > 0, \\ 0 & \text{wenn } x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f stetig ist. [2 Punkte]

(b) Zeigen Sie, dass f in $x > 0$ differenzierbar ist und berechnen Sie $f'(x)$. [3 Punkte]

(c) Finden Sie für jedes $b \geq 0$, alle Maximierer von f auf $[0, b]$.
Begründen Sie Ihre Aussage! [6 Punkte]

(d) Folgern sie aus (c), dass für $a, b > 0$ die *Ungleichung zwischen dem geometrischen und harmonischen Mittel*

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

gilt. [3 Punkte]

(e) Geben Sie für die untenstehenden Integrale jeweils an, für welche abgeschlossenen Intervalle $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ der Integrand Riemann-integrierbar ist, und berechnen Sie den Wert des Integrals in Abhängigkeit von a und b.

(i) $\displaystyle\int_a^b \frac{x^2-1}{x}\,dx,$ [3 Punkte]

(ii) $\displaystyle\int_a^b \frac{x}{x^2-1}\,dx.$ [3 Punkte]

Aufgabe 4:

$$f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x}} - \sqrt{ax} & \text{wenn } x > 0, \\ 0 & \text{wenn } x = 0. \end{cases}$$

(a) f stetig in $x > 0$ da Verknüpfung stetiger Funktionen. Zudem 1

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{2ax}{a+x} - \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \sqrt{ax} = 0.$$

1

$\Rightarrow$ f stetig in 0.

(b) Für $x>0$ ist

$$f(x) = \frac{2ax}{a+x} - \sqrt{ax}$$

diff'bar als Verknüpfung diff'barer Funktionen. Es gilt 1

$$f'(x) = \frac{2a^2}{(a+x)^2} - \sqrt{a}\ \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

$$= 2\left(\frac{a}{a+x}\right)^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}$$ 2

(c) Maximierer sind die Randpunkte $0, b$ oder die kritischen Punkte x_0 2 mit $0 = f'(x_0) = 2\left(\frac{a}{a+x_0}\right)^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x_0}}$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{x_0}{a}} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{x_0}{a}\right)^2$$

$$\overset{y = 1+\frac{x_0}{a}}{\Longrightarrow} \quad y-1 = \frac{1}{16}\, y^4 \quad \Rightarrow \quad y \leq 2$$

Also ist $x_0 = a$ kritischer Punkt und es gibt keinen größeren. Es gilt $f(x_0) = 0$ und, da $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, folgt dass $f(x) \leq 0$ für alle $x \geqslant a$.

1

Ist $x_0 < a$ ein weiterer kritischer Punkt, so folgt

$$\left(\frac{a}{a+x_0}\right)^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{x_0}} < \frac{1}{4}\,\frac{a}{x_0}$$

1

$$\Rightarrow \quad \frac{2ax_0}{a+x_0} < \sqrt{a x_0}$$

$$\Rightarrow \quad f(x_0) < 0.$$

Also folgt:

Falls $b \geq a$ sind 0 und a die Maximierer,

falls $b < a$ ist 0 der einzige Maximierer.

2

(d) OBdA ist $b \geq a$. Dann gilt nach (c)

$$f(b) \leq f(a) = 0$$

2

$$f(b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} - \sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$$ 1

(e)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

ist Riemann-integrierbar gdw 1

$0 \notin [a,b]$. Dann gilt

$$\int_a^b \frac{x^2-1}{x}\,dx = \int_a^b x - \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} - \log\left(\frac{b}{a}\right) \quad 2$$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

ist Riemann-integrierbar, wenn $\quad 1$

$-1 \notin [a,b]$ und $1 \notin [a,b]$. Dann

gilt

$$\int_a^b \frac{x}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{2x}{x^2-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \log\left(\frac{b^2-1}{a^2-1}\right).$$

2

Aufgabe 5 Betrachten Sie den von den Folgen

$$v_1 = (1, 2, 1, 2, \ldots), v_2 = (1, 1, 1, 1, \ldots), v_3 = (1, 2, 3, 3, 1, 2, 3, 3, \ldots),$$

$$v_4 = (1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots)$$

aufgespannten Teilraum V des Vektorraums ℓ^∞ aller beschränkten Folgen.

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ linear unabhängig und somit eine Basis von V sind. [4 Punkte]

(b) Sei v_5 ein beliebiger Vektor in V.
Beweisen Sie, dass v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 linear abhängig sind. [3 Punkte]

(c) Betrachten Sie die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3, v_4 dargestellte Abbildung $A\colon V \to V$.
Berechnen Sie die Folgen

$$A((1, 1, 1, \ldots)), A((2, 1, 2, 1, \ldots)), A((0, 0, 2, 1, 0, 0, 2, 1, \ldots)).$$

[3 Punkte]

(d) Finden Sie heraus, ob die Vektoren $A(v_1), A(v_2), A(v_3), A(v_4)$ linear abhängig sind. Ist $A\colon V \to V$ injektiv, surjektiv, oder bijektiv?

Begründen Sie Ihre Antworten. [6 Punkte]

(e) Finden Sie alle Folgen $v \in V$ mit $A(v) = (0, 2, 2, 3, 0, 2, 2, 3, \ldots)$.
Erklären Sie den Lösungsweg. [4 Punkte]

Aufgabe 5

(a) Sei $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0$ 2

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 0}$$

Glied Nº 1 2 3 4

1

$$\lambda_1 + 3\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{array}}$$

$\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_4$ sind linear unabhängig. 1

(b) $v_1, \dots, v_4$ sind eine Basis von V und damit unverlängerbar linear unabhängig, also ist $v_1, \dots, v_5$ linear abhängig. 3

(c) $A((1,1,1,\dots)) = A(v_2)$

$= v_1 + v_3$

$= (2,4,4,5,2,4 \dots)$ 1

$A((2,1,2,1,\dots)) = A(3v_2 - v_1)$

$$= 3(v_1 + v_3) - (v_1 + v_2 - v_4)$$

$$= 2v_1 - v_2 + 3v_3 + v_4$$

$$= (5, 11, 13, 13, 6, 12, \ldots) \quad 1$$

$$A((0,0,2,1,0,\ldots))$$

$$= A(v_3 - v_1)$$

$$= v_1 - v_4 - (v_1 + v_2 - v_4)$$

$$= -v_2$$

$$= (-1, -1, \ldots) \quad 1$$

(d) $A(v_1), \ldots, A(v_4)$ sind linear abhängig, da 3

$$A(v_3) + A(v_4) = (v_1 - v_4) + (v_3 + v_4) = v_1 + v_3 = A(v_2)$$

Also ist A nicht injektiv, da 1

$$A(v_3 + v_4 - v_2) = 0$$

und damit auch nicht surjektiv 1

und nicht bijektiv. 1

(e) Löse $A(v) = v_1 - 2v_2 + v_3$ 1

also
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad 2$$

$$\mathbb{L} = \{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 : \lambda_4 - \lambda_3 = -2, \; -\lambda_2 - \lambda_3 = -3, \; \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \}$$

$$= \left\{ -2\, v_1 + (1-\lambda)\, v_2 + (\lambda + 2)\, v_3 + \lambda\, v_4 \;:\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

1