Wir wollen in dieser Vorlesung auch die reellen Zahlen als gegeben annehmen. Sie werden durch drei Klassen von Axiomen charakterisiert:

- Köperaxiome
- Anordnungsaxiome
- Vollständigkeitsaxiom

Diese Axiome sind im Prinzip die Rechenregeln, mit denen wir arbeiten.

Körperaxiome

Eine Menge K ist ein *Körper* wenn es zwei Abbildungen

$$\texttt{Plus}\colon K \times K \to K, (x, y) \mapsto x + y,$$

$$\texttt{Mal}\colon K \times K \to K, (x, y) \mapsto xy,$$

gibt, die folgenden Axiomen genügen:

Additionsaxiome

- Assoziativgesetz: $\forall x, y, z \in K\colon x + (y + z) = (x + y) + z$.
- Kommutativgesetz: $\forall x, y \in K\colon x + y = y + x$.
- Existenz der Null: $\exists 0 \in K\, \forall x \in K\colon x + 0 = x$.
- Existenz des Negativen: $\forall x \in K\, \exists - x \in K\colon x + (-x) = 0$.

Multiplikationsaxiome

- Assoziativgesetz: $\forall x, y, z \in K\colon x(yz) = (xy)z$.
- Kommutativgesetz: $\forall x, y \in K\colon xy = yx$.
- Existenz der Eins: $\exists 1 \in K$, $1 \neq 0$, $\forall x \in K\colon 1x = x$.
- Existenz des Inversen: $\forall x \in K$, $x \neq 0\, \exists x^{-1} \in K\colon xx^{-1} = 1$.

Distributivgesetz

- $\forall x, y, z \in K\colon x(y + z) = xy + xz$.

Wenn $a, b \in K$ schreiben wir $a - b$ für $a + (-b)$ und $\frac{b}{a}$ für $a^{-1}b$ wenn $a \neq 0$.

Anordnungsaxiome

Der Körper K heißt *angeordnet*, wenn es eine Relation $R \subset K \times K$ mit den untenstehenden Eigenschaften gibt. Der besseren Lesbarkeit halber schreiben wir $x > y$ wenn $(x, y) \in R$.

- Additivität: $\forall x, y, z \in K \colon x > y \Rightarrow x + z > y + z$
- Abgeschlossenheit: $\forall x > 0, y > 0$ folgt $x + y > 0$ und $xy > 0$
- Trichotomie: $\forall x, y \in K$ gilt genau eine der drei Beziehungen $x > y$, $x = y$, $y > x$

Die natürlichen Zahlen können in jeden angeordneten Körper K eingebettet werden. K heißt *archimedisch angeordnet*, wenn für alle $x, y > 0$ eine natürliche Zahl $n \in K$ existiert mit $nx > y$.

Wir schreiben $x < y$ gleichbedeutend für $y > x$ und $x \leq y$ gleichbedeutend für $\neg(x > y)$. Dann definieren wir eine Abbildung

$$\text{Betrag} \colon K \to K, x \mapsto |x|$$

durch

$$|x| = \begin{cases} x & \text{wenn } x > 0, \\ -x & \text{wenn } x \leq 0. \end{cases}$$

Vollständigkeitsaxiom

Eine Folge (a_n) im angeordneten Körper K heißt

- *Cauchyfolge*, wenn $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a_m| \leq \epsilon \text{ für alle } n, m \geq N.$$

- *konvergent gegen $a \in K$*, wenn $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

Der Körper K heißt *vollständig*, wenn für jede Cauchyfolge (a_n) in K ein $a \in K$ existiert, so dass (a_n) gegen a konvergiert.

Die Menge der reellen Zahlen sind ein *archimedisch angeordneter, vollständiger Körper*. Wir wollen annehmen, dass sie existiert und durch obenstehende Axiome charakterisiert ist. Wir werden die Menge der reellen Zahlen mit dem Symbol $\mathbb{R}$ bezeichnen.