3. Folgen, Reihen und Funktionen

3.1 Konvergente und divergente Folgen

- Eine Folge (a_n) heißt *streng monoton wachsend* wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Ist (n_k) eine streng monoton wachsende Folge mit Werten in $\mathbb{N}$, und (a_n) eine Folge mit Werten in $\mathbb{R}$, so ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ wieder eine Folge, die aus ausgewählten Folgengliedern von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besteht. Man sagt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt *divergent gegen unendlich* wenn es zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, mit $a_n > K$ für alle $n \geq N$.

Beispiele:

- (a_n) mit $a_n = n$ divergiert gegen unendlich.
- (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ ist eine beschränkte Folge, die nicht konvergiert. Sie hat aber konvergente Teilfolgen mit den Grenzwerten 1 und -1.
- (a_n) mit $a_n = n$ falls n gerade, und $a_n = \frac{1}{n}$ falls n ungerade, ist eine Folge, die nicht konvergiert. Sie hat Teilfolgen, die gegen 0 konvergieren, und Teilfolgen, die gegen unendlich divergieren.

Satz 1.1 Sei (a_n) eine Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) (a_n) divergiert gegen unendlich.

(b) $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ konvergiert gegen null.

Beweis: $(a) \Rightarrow (b)$

Beweis: $(b) \Rightarrow (a)$

Satz 1.2 Jede Folge (a_n), die nicht nach oben beschränkt ist, besitzt eine Teilfolge, die gegen unendlich divergiert.

Beweis:

Wenn $a \leq b$ so schreiben wir $[a, b]$ für die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x \leq b$ und nennen $[a, b]$ *abgeschlossenes Intervall* mit Intervallgrenzen a und b.

Satz 1.3 (Satz von Bolzano-Weierstrass) Jede beschränkte Folge (a_n) reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis:

3.2 Unendliche Reihen

Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Die Folge (s_n) definiert durch

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

heißt *Reihe* mit Gliedfolge (a_n) und falls sie konvergiert (oder gegen unendlich divergiert) wird ihr Grenzwert mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

bezeichnet. Wir erlauben auch Reihen, deren Gliedfolge nicht mit 1 sondern mit einem beliebigen Index $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gestartet wird und schreiben in diesem Fall

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k := \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+n-1}.$$

Im folgenden vereinbaren wir, für alle $x \in K$, dass $x^0 := 1$.

Satz 2.1 (Geometrische Reihe) Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

und somit, falls $|x| < 1$, auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}.$$

Beweis:

Satz 2.2 (Harmonische Reihe) Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Beweis:

Satz 2.3 Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, so gilt

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

(b) Für jedes n konvergiert auch $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0.$$

Bemerkung: Satz 2.2 zeigt, dass die Umkehrung von (a) nicht gilt. Obwohl $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Beweis:

Satz 2.4 (Majorantenkriterium) Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert und $|b_k| \leq a_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Beweis:

Beispiele:

- Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergiert nicht. Denn würde sie konvergieren, so folgte aus $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ und dem Majorantenkriterium, dass auch die harmonische Reihe konvergiert.
- Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert. Es gilt nämlich

$$\left|\frac{1}{n^2}\right| \leq \frac{2}{n(n+1)}$$

und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ konvergiert, da für die Partialsummen dieser Reihe gilt (per Induktion nachzuprüfen)

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} = \frac{2n}{n+1},$$

und die Folge der Partialsummen folglich konvergiert (gegen zwei).

Satz 2.5 (Exponentialreihe) Für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (\text{ mit } \frac{x^0}{0!} := 1)$$

Die Zahl $\mathrm{e} := \exp(1)$ heißt *Eulersche Zahl*.

Beweis:

3.3 Funktionen und Stetigkeit

Sei $D \subset \mathbb{R}$. Abbildungen $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißen auch *(reelle) Funktionen.*

Beispiele:

- Ist $D = \{x \in \mathbb{R}\colon x \geq 0\}$, so ist durch
$$f\colon D \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$$
die Wurzelfunktion gegeben.
- Ist $D = \mathbb{R}$, so ist durch
$$f\colon D \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x)$$
die Exponentialfunktion gegeben.
- Ist $D = \mathbb{R}$, so ist durch
$$f\colon D \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$
die Quadratfunktion gegeben.
- Sind $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und $D = \mathbb{R}$, so sind die Funktionen
$$f\colon D \to \mathbb{R}, x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$
die Polynomfunktionen.

Definitionen:

- Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ so, dass es Folgen (a_n) mit Folgengliedern in D gibt, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Dies gilt zum Beispiel immer, wenn $a \in D$. Wir sagen, dass
$$\lim_{x\to a} f(x) = y,$$
wenn für *jede* solche Folge (a_n) die Folge $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen y konvergiert.

- Wenn es eine Folge (a_n) mit Folgengliedern in D gibt, die gegen unendlich divergiert, so schreiben wir
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = y,$$
wenn für *jede* solche Folge (a_n) die Folge $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen y konvergiert.

- Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *stetig im Punkt* $a \in D$, wenn
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$
Die Funktion f heißt *stetig*, wenn sie in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist.

Satz 3.1 (Stetigkeit)
Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $a \in D$, wenn
$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ so, dass } x \in D, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Beweis:

Satz 3.2 (Stetigkeitssätze)
Sind $f\colon D \to \mathbb{R}, g\colon D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$, so sind auch

(a) die Funktion $f + g\colon D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + g(x)$,

(b) die Funktion $fg\colon D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)g(x)$,

(c) falls $a \in D' := \{x\colon g(x) \neq 0\}$ die Funktion $\frac{f}{g}\colon D' \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$

stetig in a.

Beweis: Das folgt direkt aus der Algebra von Grenzwerten.

Beispiele:

- Ist $D = \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$, so ist durch
$$f\colon D \to \mathbb{R}, x \mapsto c$$
die konstante Funktion gegeben. f ist in jedem Punkt $a \in D$ stetig, da die Folgen $(f(a_n))$ konstant sind und gegen den konstanten Wert c konvergieren.

- Die Heavisidefunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1$ wenn $x > 0$, $x \mapsto \frac{1}{2}$ wenn $x = 0$, und $x \mapsto 0$ wenn $x < 0$, ist in jedem $a \neq 0$ stetig und in $a = 0$ unstetig. Die Unstetigkeit in $a = 0$ folgt durch Wahl der Folge $a_n = \frac{1}{n}$, die gegen null konvergiert, obwohl $(f(a_n))$ die konstante Folge mit Wert 1 ist und nicht gegen $f(0) = \frac{1}{2}$ konvergiert.

- Die Exponentialfunktion und Wurzelfunktion sind in ihrem ganzen Definitionsbereich stetig. Das werden wir später zeigen.

- Die Quadratfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist stetig. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$. Wähle $\delta = |a| \wedge \frac{\epsilon}{3|a|}$. Dann gilt für alle x mit $|x - a| < \delta$, dass
$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x - a|\,|x + a| < \delta(|x - a| + 2|a|) \leq \epsilon.$$

- Sind $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, so sind die Polynomfunktionen
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$
stetig. Für die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ ist die Stetigkeit leicht zu sehen. Die Steigkeit beleibiger Polynomfunktionen folgt dann, indem man die Stetigkeitssätze sukzessive auf diese und die konstante Funktion anwendet.

Satz 3.3 (Zwischenwertsatz)
Sei $a < b$ und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert für jede Zahl y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ (d.h. $f(a) < y < f(b)$ oder $f(b) < y < f(a)$) ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

Beweis:

Satz 3.4 (Extremwertsatz)
Sei $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert $x_0 \in [a,b]$, so dass für alle $x \in [a,b]$ gilt $f(x_0) \geq f(x)$. Wir nennen x_0 einen *Maximierer* und $f(x_0)$ das *Maximum* von f auf $[a,b]$.

Bemerkung: Der Beweis nutzt die spezielle Struktur abgeschlossener Intervalle. Auf dem offenen Intervall $]a,b[:= \{x \in \mathbb{R}\colon a < x < b\}$ gilt keine entsprechende Aussage. Man betrachte zum Beispiel $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}, x \mapsto x$. Diese Funktion ist stetig, es gibt aber keinen Maximierer, denn zu jedem $x_0 \in]a,b[$ gibt es ein $x \in]a,b[$ mit $x_0 < x$, also $f(x_0) < f(x)$.

Zum Beweis benötigen wir das folgende Lemma. Wir bezeichnen $M \in \mathbb{R}$ als *obere Schranke* von $f\colon D \to \mathbb{R}$, wenn gilt

$$f(x) \leq M \text{ für alle } x \in D.$$

Lemma 3.5 Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gibt es eine Folge (a_n) in $[a,b]$ so,dass $(f(a_n))$ entweder gegen eine obere Schranke von f konvergiert, oder gegen unendlich divergiert.

Beweis:

Beweis von Satz 3.4:

3.4 Spezielle Funktionen

Wir betrachten nun die Stetigkeit und weitere Eigenschaften der Exponential- und Wurzelfunktion. Da erstere durch eine konvergente Reihe gebildet wurde, benötigen wir zunächst einen Satz über die Konvergenz spezieller Reihen, die Cauchyprodukte genannt werden.

Satz 4.1 (Konvergenz von Cauchyprodukten) Seien (a_n) und (b_n) Folgen positiver Zahlen, so dass die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a, \sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$ konvergieren. Setze

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k.$$

Dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ und der Grenzwert ist ab.

Beweis:

Satz 4.2 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

Beweis:

Korollar 4.3 Es gilt

(a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(-x) = (\exp(x))^{-1}$.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) > 0$.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\exp(n) = e^n$.

Beweis: (a) Es gilt $\exp(x)\exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1$. (b) Es gilt $\exp(x) = \exp(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = (\exp(\frac{x}{2}))^2 > 0$. (c) folgt leicht durch Induktion.

Definition: Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *streng monoton wachsend*, wenn aus $x, y \in D$, $x < x'$ folgt, dass $f(x) < f(x')$. Folgt nur $f(x) \leq f(x')$, so heißt sie *monoton wachsend*.

Satz 4.4 Die Exponentialfunktion

$$\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x)$$

ist stetig und streng monoton wachsend.

Wir benötigen folgende Aussage.

Lemma 4.5 $\lim_{x\to 0} \exp(x) = 1$.

Beweis:

Beweis von Satz 4.4

Satz 4.6 Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monoton wachsende Funktion. Dann ist $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ und die Abbildung

$$f\colon [a,b] \to [f(a), f(b)]$$

ist bijektiv. Die Umkehrabbildung

$$f^{-1}\colon [f(a), f(b)] \to [a,b]$$

ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend.

Beweis:

Setze $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \colon x > 0\}$.

Satz 4.7 Die Umkehrabbildung der Quadratfunktion ist die Wurzelfunktion

$$f \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}.$$

Sie ist stetig und streng monoton wachsend.

Beweis:

Satz 4.8 Die Umkehrabbildung der Exponentialfunktion

$$\log \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \log(x)$$

existiert und heißt *Logarithmusfunktion*. Sie ist stetig und streng monoton wachsend. Für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$ erfüllt sie die Gleichung

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y).$$

Beweis: