Mathematik für Lehramt I

Partielles Vorlesungsskelett

Peter Mörters

Universität zu Köln
Mathematisches Institut

Wintersemester 2019/20

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Mengen, Abbildungen und natürliche Zahlen

1.0 Worum es geht und womit wir anfangen...

Eine der wichtigsten Eigenschaften eines guten Mathematiklehrers (oder einer guten Mathematiklehrerin) ist es, die Mathematik *gut erklären* zu können. Gute Erklärungen sind fundiert in tiefem Verständnis und der Fähigkeit, sich präzise auszudrücken. Das Ziel dieser Vorlesung ist es daher, dass Sie die Fähigkeit entwickeln, mit abstrakten Konzepten umzugehen, exakte logische Schlüsse zu ziehen und Beweise zu führen. Das soll Sie in die Lage versetzen, Ihren zukünftigen Schülern mathematische Zusammenhänge sauber und klar zu erklären. Wir werden dabei den Stoff der Schulmathematik ganz neu und von einen abstrakten Warte kennenlernen. Und hoffentlich behalten Sie dabei ihren Spaß an der Mathematik, den Sie natürlich auch an Ihre Schüler weitergeben sollen.

Anders als in der Schule werden wir genau darauf achten, eine wasserdichte Theorie aufzubauen: Jeder neue Begriff bzw. jeder neue Satz wird nur unter Verwendung des bisher Bekannten exakt definiert bzw. bewiesen. Aber wir brauchen natürlich auch einen Grundstock an Konzepten, die wir voraussetzen wollen.

Wir setzen voraus, dass es sinnvoll ist, über logische Aussagen und deren Wahrheit zu reden. Unter einer Aussage verstehen wir (grob gesagt) ein sprachliches Gebilde, das entweder wahr ist (gilt) oder falsch ist (nicht gilt). Wichtig sind auch solche sprachlichen Gebilde, in denen freie Variablen, also Platzhalter, vorkommen, und die erst beim Einsetzen von Werten fur diese Variablen Aussagen liefern. Man bezeichnet sie als Aussageformen.

Beispiel 0.1 (a) 1+1 = 2 ist eine wahre, 1+1 = 3 eine falsche, und 1+1 überhaupt keine Aussage. (b) $x + 1 = 2$ ist eine Aussageform, die beim Einsetzen von $x = 1$ in eine wahre, beim Einsetzen jeder anderen reellen Zahl in eine falsche Aussage übergeht.

Um anzudeuten, dass der naive Begriff der Aussage durchaus problematisch sein kann betrachten wir den folgenden "Gottesbeweis"(nach L. Mattner). Betrachten Sie die folgenden drei "Aussagen".

- Diese drei Aussagen sind alle falsch.
- Genau eine dieser Aussagen ist falsch.
- Genau zwei dieser Aussagen sind falsch und Gott existiert.

Wenn wir davon ausgehen, dass dies Aussagen sind, die wahr oder falsch sind, dann argumentieren wir wie folgt: Da sich die Aussagen widersprechen kann nur eine oder keine wahr sein. Wenn keine wahr ist, gilt aber die erste Aussage, was ein Widerspruch ist. Also muss genau eine Aussage wahr sein und das muss dann die letzte sein, da allein diese nicht zum Widerspruch führt. Dann folgt die Existenz Gottes (oder jede beliebige andere Aussage, die sie der dritten anfügen). An diesem Beispiel sehen wir, dass bei der Formulierung von Aussagen Vorsicht angebracht ist und zum Beispiel Selbstbezug zu vermeiden ist.

Wir nehmen zunächst folgende Konzepte als gegeben an:

- naive Mengenlehre, insbesondere für Mengen M die Bezeichnungen
  - $\emptyset$ ist die leere Menge,
  - $x \in M$ (x ist ein Element von M)
  - $M \subset N$ (M ist Teilmenge von N)
  - $M \supset N$ (M ist Obermenge von N)
  - Wenn $N \subset M$ und $M \subset N$ folgt $N = M$
  - $M \cap N$ (Schnittmenge von M und N)
  - $M \cup N$ (Vereinigungsmenge von M und N)
  - $M \setminus N$ (M ohne die Elemente von N)
  - Mengen M, N heißen disjunkt, wenn $M \cap N = \emptyset$
  - $M \times N = \{(m, n) \colon m \in M, n \in N\}$ (die Menge aller geordneten Paare (m, n) mit $m \in M$ und $n \in N$, genannt das kartesische Produkt von M und N)

- elementare Aussagenlogik, insbesondere für Aussagen A, B
  - die Bezeichnungen $\neg A$ (das Gegenteil von A),
  - $A \Rightarrow B$ (aus A folgt B) und $A \Leftarrow B$ (A folgt aus B).
  - $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $\neg B \Rightarrow \neg A$
- und für Aussageformen $A(x)$ mit Variable $x \in M$ die Bezeichnungen
  - $\forall x \in M : A(x)$ (für alle x in der Menge M gilt $A(x)$)
  - $\exists x \in M : A(x)$ (es existiert ein x in M so, dass $A(x)$ gilt)
  - $\exists! x \in M : A(x)$ (es existiert genau ein x in M so, dass $A(x)$ gilt)
- die natürlichen Zahlen
  - $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \dots\}$,
  - die Null $0 \notin \mathbb{N}$,
  - die Operationen $+, \cdot$ und ihre Rechenregeln,
  - das *Induktionsprinzip*: Ist M eine Menge und gilt
    (a) $1 \in M$ und
    (b) $\{1, \dots, n\} \subset M \cap \mathbb{N} \Rightarrow (n + 1) \in M$,
    so folgt $\mathbb{N} \subset M$.

1.1 Aussagen und Mengen

Die beiden Symbole $\forall$ und $\exists$ bezeichnet man als *Quantoren*. Beachte, dass diese beiden Quantoren nicht miteinander vertauschbar sind: So besagt z. B. die Aussage

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} \colon m > n$$

'zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine Zahl m, die größer ist' (was offensichtlich wahr ist), während die Umkehrung der beiden Quantoren die Aussage

$$\exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \colon m > n$$

'es gibt eine natürliche Zahl m, die größer als jede Zahl n ist' liefert (was ebenso offensichtlich falsch ist). Der Unterschied besteht einfach darin, dass im ersten Fall zuerst das n gewählt werden muss und dann ein m dazu existieren muss (das von n abhängen darf), während es im zweiten Fall dasselbe m für alle n tun müsste.

Bemerkung 1.1. Jede Aussage laässt sich auf viele Arten aufschreiben, sowohl als deutscher Satz als auch als mathematische Formel. Die gerade eben betrachtete Aussage kann man gleichwertig formulieren als

(a) $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N}\colon m > n$

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m > n$.

(c) Zu jeder natürlichen Zahl gibt es noch eine größere.

Welche Form Sie bevorzugen ist Geschmacksache (mir gefällt (b) am besten). Auf jeden Fall besteht aber ein Beweis aus einer Abfolge von Sätzen, die logisch aus den Annahmen die gewünschten Schlüsse ziehen. Diese Sätze dürfen durch Formelsprache abgekürzt werden, das muss aber nicht sein.

Wenn man von einer Aussage das Gegenteil, also die Verneinung bildet verändern sich die Quantoren und logischen Verknüpfungen.

(i) $\neg(\forall x : A(x)$ und $B(x))$ ist gleichwertig zu $\exists x\colon \neg A(x)$ oder $\neg B(x)$.
Das Gegenteil von 'für alle x gilt $A(x)$ und $B(x)$' ist 'es gibt ein x, für das $A(x)$ oder $B(x)$ falsch ist'.

(ii) $\neg(\exists x\colon A(x)$ oder $B(x))$ ist gleichwertig zu $\forall x\colon \neg A(x)$ und $\neg B(x)$.

Eine Verneinung führt dazu, dass *und* mit *oder* sowie *für alle* mit *es gibt* vertauscht wird. So ist z. B. das Gegenteil der Aussage 'In Köln haben alle Haushalte Strom und fließendes Wasser' die Aussage 'In Köln gibt es einen Haushalt, der keinen Strom oder kein fließendes Wasser hat'.

Die einfachste Art, eine Menge konkret anzugeben, besteht darin, ihre verschiedenen Elemente in geschweiften Klammern aufzulisten, wobei es auf die Reihenfolge nicht ankommt. So sind z. B. $\{1, 2, 3\}$ und $\{2, 3, 1\}$ zwei Schreibweisen für dieselbe Menge. Man beachte, dass die Elemente einer Menge nicht unbedingt Zahlen sein mussen wir könnten z. B. auch die Menge aller Studenten in dieser Vorlesung betrachten. In der Tat kommen in der Mathematik sogar oft Mengen vor, deren Elemente selbst wieder Mengen sind; so ist z. B. $\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ eine gültige Menge (mit 2 Elementen). Man kann die Elemente einer Menge auch durch eine beschreibende Eigenschaft angeben $\{x \in M : A(x)\}$ bezeichnet die Menge aller Objekte $x \in M$, fur die die Aussage $A(x)$ wahr ist, wie z. B. in $\{x \in \mathbb{N}\colon x^2 = 1\} = \{1\}$.

1.2 Relationen und Abbildungen

Eine Teilmenge $R \subset M \times N$ heißt *Relation* zwischen M und N. Wenn $M = N$ spricht man von Relationen auf M.

Beispiel: $R = \{(m, n)\colon m \geq n\}$ $R = \{(m, n)\colon n = 5m\}$, und $R = \{(m, n)\colon m = 5n\}$ sind Relationen auf $\mathbb{N}$.

Eine Relation A zwischen M und N heißt *Abbildung* von M nach N, wenn gilt

$$\forall m \in M \exists! n \in N \text{ mit } (m,n) \in A.$$

Man bezeichnet dann auch $n = A(m)$ und schreibt

$$A\colon M \to N, m \mapsto A(m),$$

Die Menge M heißt *Definitionsbereich* und N *Bildbereich* der Abbildung A. Wenn $M' \subset M$ so heißt die Menge

$$A(M') = \{n\colon \exists m \in M' \text{ mit } (m,n) \in A\}$$

das *Bild von M' unter A*. Wenn $N' \subset N$ so heißt die Menge

$$A^{-1}(N') = \{m\colon \exists n \in N' \text{ mit } (m,n) \in A\}$$

das *Urbild von N' unter A*.

Satz 2.1 Sind $A\colon M \to N, m \mapsto A(m)$, $B\colon N \to O, n \mapsto B(n)$ Abbildungen, so ist die Relation

$$B \circ A = \{(m,o)\colon \exists n \in N \text{ mit } (m,n) \in A, (n,o) \in B\},$$

gesprochen *B nach A*, eine Abbildung von M nach O. Sie heißt die *Verknüpfung* von A und B, wir schreiben auch

$$B \circ A\colon M \to O, m \mapsto B(A(m)).$$

Beweis:

Eine Abbildung $A\colon M \to N$ heißt *injektiv* wenn gilt

$$\forall n \in N \text{ gibt es höchstens ein } m \in M \text{ mit } (m, n) \in A.$$

Eine Abbildung $A\colon M \to N$ heißt *surjektiv* wenn gilt

$$\forall n \in N \text{ gibt es (mindestens) ein } m \in M \text{ mit } (m, n) \in A.$$

Eine Abbildung $A\colon M \to N$ heißt *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Für jede Menge N definiere die Abbildung

$$\mathrm{Id}_N\colon N \to N, \mathrm{Id}_N(n) = n,$$

die *Identität* auf N.

Satz 2.2 Wenn $A\colon M \to N$ bijektiv ist, so gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung $A^{-1}\colon N \to M$ mit $A \circ A^{-1} = \mathrm{Id}_N$ und $A^{-1} \circ A = \mathrm{Id}_M$. Diese Abbildung heißt *Umkehrabbildung* von A.

Beweis:

Bemerkung 2.3 Die Abbildung A^{-1} heißt *Umkehrabbildung* von A. Als Übungsaufgabe zeigen wir, dass sie auch bijektiv ist.

1.3 Endliche und unendliche Mengen

Eine Menge M heißt *unendlich*, wenn es eine Abbildung $A\colon M \to M$ gibt, die injektiv aber nicht surjektiv ist. Ansonsten heißt sie *endlich*.

Beispiel: $\mathbb{N}$ ist eine unendliche Menge.

Beweis: Betrachte $A := \{(n, n+1)\colon n \in \mathbb{N}\}$. Diese Relation ist eine Abbildung $A\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n+1$. Sie ist injektiv, da $n+1 = m+1 \Rightarrow n = m$, aber nicht surjektiv, da es kein $n \in \mathbb{N}$ mit $A(n) = 1$ gibt.

Satz 3.1 Sei $B\colon M \to N$ eine bijektive Abbildung. Dann ist M genau dann unendlich, wenn N unendlich ist.

Beweis:

Satz 3.2 Eine Menge M ist genau dann unendlich, wenn es eine Abbildung $B\colon M \to M$ gibt, die surjektiv aber nicht injektiv ist.

Beweis:

Korollar 3.3 Sei M endliche Menge und $A : M \to M$ eine Abbildung.

(i) Wenn A injektiv ist, so ist A auch surjektiv und damit bijektiv.

(ii) Wenn A surjektiv ist, so ist A auch injektiv und damit bijektiv.

Beweis:

Satz 3.4 Teilmengen endlicher Mengen sind endlich, Obermengen unendlicher Mengen sind unendlich.

Beweis:

Satz 3.5 Wenn M eine nichtleere, endliche Menge ist, so gibt es genau ein $\ell \in \mathbb{N}$, so dass es eine Bijektion $A\colon \{1, 2, \ldots, \ell\} \to M$ gibt. ℓ heißt *Anzahl der Elemente* von M.

Beweis:

Satz 3.6 Seien M, N endliche, nichtleere Mengen. Die Anzahl an Elementen von M und N ist genau dann gleich, wenn es eine bijektive Abbildung $A\colon M \to N$ gibt.

Beweis:

Wir definieren der Vollständigkeit halber die Anzahl der Elemente der leeren Menge als null. Außerdem sagen wir, dass zwei Mengen M, N die gleiche Anzahl an Elementen haben, wenn es eine bijektive Abbildung $A\colon M \to N$ gibt. Der vorherige Satz sagt, dass das für endliche Mengen eine sinnvolle Definition ist. Wir werden später die Frage diskutieren, ob je zwei unendliche Mengen automatisch die gleiche Anzahl an Elementen haben oder nicht.

Satz 3.7 Sind $M \subset N$ endliche Mengen, sodass m die Anzahl der Elemente von M und n die Anzahl der Elemente von N ist, so hat $N \setminus M$ genau $n - m$ Elemente und insbesondere gilt $m \leq n$.

Beweis:

Satz 3.8 Seien M, N endliche Mengen, sodass m die Anzahl der Elemente von M und n die Anzahl der Elemente von N ist. Sei o die Anzahl der Elemente der endlichen Menge $M \cap N$. Dann ist auch $M \cup N$ endlich und hat $m + n - o$ Elemente.

Beweis:

Satz 3.9 Seien M, N endliche Mengen, sodass m die Anzahl der Elemente von M und n die Anzahl der Elemente von N ist. Dann ist auch $M \times N$ endlich und hat mn Elemente.

Beweis:

1.4 Abzählbar unendliche Mengen

Wir haben definiert, dass zwei Mengen M, N die gleiche Anzahl an Elementen haben, wenn es eine Bijektion $A\colon M \to N$ gibt. Ausserdem wissen wir, dass $\mathbb{N}$ eine unendliche Menge ist. Das motiviert die folgende Definition.

Definition: Eine Menge N heißt *abzählbar unendlich*, wenn es eine bijektive Abbildung $A\colon \mathbb{N} \to N$ gibt, mit anderen Worten wenn N dieselbe Anzahl an Elementen hat wie die Menge der natürlichen Zahlen.

Ist jede unendliche Menge abzählbar unendlich? Lange glaubte man, dass dies der Fall sei. Die negative Antwort auf diese Frage wurde von Georg Cantor 1874 gegeben blieb aber im ausgehenden 19. Jahrhundert mathematisch und philosophisch hochumstritten.

Satz 4.1 (Satz von Cantor) Es gibt keine surjektive Abbildung von der Menge $\mathbb{N}$ auf die Menge $P(\mathbb{N})$. Insbesondere ist $P(\mathbb{N})$ unendlich aber nicht abzählbar unendlich.

Beweis:

1.5 Vollständige Induktion

Wir wollen in diesem Abschnitt das Induktionsprinzip anhand von einigen Beispielen einüben.

Satz 5.1 Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis:

Satz 5.2 Seien $m \leq n$ natürliche Zahlen. Sei N eine Menge mit n Elementen und $P_m(N)$ die Menge aller Teilmengen von N mit m Elementen. Dann hat $P_m(N)$ genau

$$\binom{n}{m} := \prod_{j=1}^{m} \frac{n-j+1}{j} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Elemente.

Beweis:

Satz 5.3 Sei N eine nichtleere, endliche Menge mit n Elementen. Dann hat $P(N)$, die Menge aller Teilmengen von N, genau 2^n Elemente. $P(N)$ heißt auch *Potenzmenge* von N.

Beweis:

1.6 Äquivalenzrelationen

Wir haben Relationen auf einer Menge M als Teilmengen R des kartesischen Produkts $M \times M$ definiert. Eine wichtige Klasse von Relationen waren die Abbildungen, eine weitere sind die Äquivalenzrelationen.

Eine Relation $R \subset M \times M$ heißt *Äquivalenzrelation*, wenn gilt

- $\forall x \in M \colon (x, x) \in R$ (Reflexivität)
- $\forall x, y \in M \colon (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ (Symmetrie)
- $\forall x, y, z \in M \colon (x, y) \in R, (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ (Transitivität)

Die Idee ist, dass man Elemente $x, y \in M$ als in gewissem Sinne gleichwertig auffasst, wenn $(x, y) \in R$, also wenn sie äquivalent sind. Ein Beispiel für eine Äquivalenzrelation ist daher auch

$$R = \{(m, m) \colon m \in M\},$$

die *Gleichheitsrelation*. Andere Beispiele

- $R = \{(n, m) \colon n - m \text{ oder } m - n \text{ ist gerade Zahl}\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,
- Sei $A \colon M \to N, m \mapsto A(m)$ eine Abbildung. Dann ist

  $$R = \{(m, m') \in M \colon A(m) = A(m')\}$$

  eine Äquivalenzrelation.

Ist R eine Äquivalenzrelation auf M und $m \in M$, so heißt die Menge

$$[m] = \{n \in M \colon (n, m) \in R\} \subset M$$

die *Äquivalenzklasse von m*.

Satz 6.1. Eine Menge $A \subset M$ ist genau dann eine Äquivalenzklasse bezüglich der Relation R wenn gilt

- $A \neq \emptyset$,
- $n, m \in A \Rightarrow (n, m) \in R$,
- $n \in A, m \in M, (n, m) \in R \Rightarrow m \in A$.

Ist R eine Äquivalenzrelation auf der Menge M, so gilt für alle Äquivalenzklassen $A, A' \subset M$ immer entweder $A = A'$ oder $A \cap A' = \emptyset$.

Beweis:

Die Äquivalenzklassen betrachtet man als Elemente einer neuen Menge, die *Quotientenmenge* von M nach R genannt und mit M/R bezeichnet wird. Der folgende Satz zeigt, dass das zweite Beipiel oben ganz allgemein ist.

Satz 6.2. Ist R eine Äquivalenzrelation auf der Menge M, so ist die Abbildung

$$A\colon M \to M/R, m \mapsto [m]$$

surjektiv und es gilt

$$(m,n) \in R \text{ genau dann wenn } A(m) = A(n).$$

Beweis:

Satz 6.3. Ist $B\colon M \to N, m \mapsto B(m)$ eine Abbildung und R die durch

$$R = \{(m, m') \in M\colon B(m) = B(m')\}$$

gegebene Äquivalenzrelation auf der Menge M. Dann ist durch

$$B'\colon M/R \to B(M), [m] \mapsto B(m)$$

eine bijektive Abbildung gegeben.

Beweis: