2. Die reellen Zahlen

Wir wollen in dieser Vorlesung auch die reellen Zahlen als gegeben annehmen. Sie werden durch drei Klassen von Axiomen charakterisiert:

- Köperaxiome
- Anordnungsaxiome
- Vollständigkeitsaxiom

Diese Axiome sind im Prinzip die Rechenregeln, mit denen wir arbeiten. Wir werden die Menge der reellen Zahlen mit dem Symbol $\mathbb{R}$ bezeichnen.

2.1 Körperaxiome

Eine Menge K ist ein *Körper* wenn es zwei Abbildungen

$$\texttt{Plus}\colon K \times K \to K, (x, y) \mapsto x + y,$$

$$\texttt{Mal}\colon K \times K \to K, (x, y) \mapsto xy,$$

gibt, die folgenden Axiomen genügen:

Additionsaxiome

- Assoziativgesetz: $\forall x, y, z \in K\colon x + (y + z) = (x + y) + z$.
- Kommutativgesetz: $\forall x, y \in K\colon x + y = y + x$.
- Existenz der Null: $\exists 0 \in K \,\forall x \in K\colon x + 0 = x$.
- Existenz des Negativen: $\forall x \in K \,\exists -x \in K\colon x + (-x) = 0$.

Multiplikationsaxiome

- Assoziativgesetz: $\forall x, y, z \in K\colon x(yz) = (xy)z$.
- Kommutativgesetz: $\forall x, y \in K\colon xy = yx$.
- Existenz der Eins: $\exists 1 \in K,\ 1 \neq 0,\ \forall x \in K\colon 1x = x$.
- Existenz des Inversen: $\forall x \in K,\ x \neq 0 \,\exists x^{-1} \in K\colon xx^{-1} = 1$.

Distributivgesetz

- $\forall x, y, z \in K\colon x(y+z) = xy + xz$.

Beispiele: Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden mit der jeweils üblichen Addition und Multiplikation einen Körper. Ein weiteres Beispiel ist $K_2 = \{0, 1\}$ mit den Rechenregeln $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 0, 00 = 0, 01 = 10 = 0, 11 = 1$. Die Körperaxiome alleine genügen also nicht, um die reellen Zahlen zu charakterisieren.

Wenn $a, b \in K$ schreiben wir $a - b$ für $a + (-b)$.

Satz 1.1 Für jeden Körper K gilt:

(a) Es gibt genau eine Null.

(b) Zu jedem $x \in K$ gibt es genau ein $-x \in K$.

(c) Es gilt $-0 = 0$.

(d) Die Gleichung $a + x = b$ hat genau eine Lösung, nämlich $x = b - a$.

(e) Für jedes $x \in K$ gilt $-(-x) = x$.

(f) Für jedes $x, y \in K$ gilt $-(x + y) = (-x) + (-y)$.

Beweis:

Satz 1.2 Für jeden Körper K gilt:

(a) Es gibt genau eine Eins.

(b) Zu jedem $x \neq 0$ gibt es genau ein $x^{-1} \in K$.

(c) Die Gleichung $ax = b$ hat genau eine Lösung, nämlich $x = a^{-1}b$.

(d) Für alle $x \in K$ gilt $x0 = 0$.

(e) Für $x, y \in K$ gilt $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $y = 0$.

(f) Für jedes $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $-(xy) = (-x)y$ und $xy = (-x)(-y)$.

(g) Für alle $x \neq 0$ gilt $(x^{-1})^{-1} = x$.

(h) Für alle $x \neq 0, y \neq 0$ gilt $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.

Wenn $a, b \in K$ schreiben wir $\frac{b}{a}$ für $a^{-1}b$ wenn $a \neq 0$.

Beweis:

Satz 1.3 (Potenzen) Für jedes $x \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Zahl $x^n \in K$ mit den Eigenschaften

(i) $x^1 = x$

(ii) $\forall k, m \in \mathbb{N}\colon x^k x^m = x^{k+m}$,

(iii) $\forall x, y \in K\colon (x^n)(y^n) = (xy)^n$.

Beweis:

2.2 Anordnungsaxiome

Der Körper K heißt *angeordnet*, wenn es eine Relation $R \subset K \times K$ mit den untenstehenden Eigenschaften gibt. Der besseren Lesbarkeit halber schreiben wir $x > y$ wenn $(x, y) \in R$.

- Additivität: $\forall x, y, z \in K\colon x > y \Rightarrow x + z > y + z$
- Abgeschlossenheit: $\forall x > 0, y > 0$ folgt $x + y > 0$ und $xy > 0$
- Trichotomie: $\forall x, y \in K$ gilt genau eine der drei Beziehungen
  $x > y$, $x = y$, $y > x$

Wir schreiben $x < y$ gleichbedeutend für $y > x$, $x \leq y$ gleichbedeutend für $\neg(x > y)$ und $x \geq y$ gleichbedeutend für $\neg(x < y)$.

Satz 2.1 Für jeden angeordneten Körper K gilt:

(a) $\forall x \in K$ gilt $x < 0$ genau dann wenn $-x > 0$.

(b) Transitivität: $\forall x, y, z \in K\colon x > y, y > z \Rightarrow x > z$.

(c) $\forall w, x, y, z \in K\colon w > x, y > z \Rightarrow w + y > x + z$.

(d) $\forall a, x, y \in K\colon x > y, a > 0 \Rightarrow ax > ay$.

(e) $\forall a, x, y \in K\colon x > y, a < 0 \Rightarrow ax < ay$.

(f) $\forall x \in K, x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$.

(g) Ist $x > y > 0$, so folgt auch $y^{-1} > x^{-1} > 0$.

(h) Es gilt $1 > 0$.

Beweis:

Satz 2.2 Für jeden angeordneten Körper K gibt es eine injektive Abbildung $I\colon \mathbb{N} \cup \{0\} \to K$ mit

- $I(0) = 0, I(1) = 1,$
- $\forall n, m \in \mathbb{N}$ gilt $I(n + m) = I(n) + I(m)$ und $I(nm) = I(n)I(m)$
- $I(n) > I(m)$ falls $n > m$.

Beweis:

Wir dürfen damit $I(n)$ mit n *identifizieren* und sagen, dass die natürlichen Zahlen in den angeordneten Körper K *eingebettet* sind. Ab sofort betrachten wir also $\mathbb{N}$ als Teilmenge von K.

Wir definieren eine Abbildung

$$\text{Betrag}\colon K \to K, x \mapsto |x|$$

durch

$$|x| = \begin{cases} x & \text{wenn } x > 0, \\ -x & \text{wenn } x \leq 0. \end{cases}$$

Satz 2.3 Für jeden angeordneten Körper K gilt:

(a) Es gilt $|x| \geq 0$ und $|x| = 0$ genau dann wenn $x = 0$.

(b) $|-x| = |x|$ für alle $x \in K$.

(c) $\forall x, y \in K\colon |xy| = |x|\,|y|$.

(d) Dreiecksungleichung: $\forall x, y \in K\colon |x + y| \leq |x| + |y|$.

Beweis:

Ein angeordneter Körper K heißt *archimedisch angeordnet*, wenn für alle $x, y > 0$ eine natürliche Zahl $n \in K$ existiert mit $nx > y$.

Satz 2.4 Für jeden archimedisch angeordneten Körper K gilt:
Zu jedem $x \in K$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$, zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \epsilon$.

Beweis:

Satz 2.5 (Bernoullische Ungleichung) Sei $x \geq -1$. Dann gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis:

Satz 2.6 Sei $b > 1$. Dann gibt es zu jedem $x \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n > x$.

Beweis:

2.3 Folgen und Grenzwerte

Eine *Folge* in K ist eine Abbildung

$$a\colon \mathbb{N} \to K, n \mapsto a_n.$$

Man schreibt auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder (a_n) oder $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$.

Bespiele:

- $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt die konstante Folge $(a, a, a, \ldots)$.
- $a_n = \frac{1}{n}$ ergibt $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$.
- $a_n = (-1)^n$ ergibt $(-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$.
- $a_n = \frac{n}{n+1}$ ergibt $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots)$.
- $a_0 = 1, a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für alle $n \geq 2$ ergibt die Fibonaccifolge $(1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$.

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem geordneten Körper K heißt *konvergent gegen* $a \in K$, wenn $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \epsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

Kommentare:

- Um Konvergenz (nach der Definition) zu zeigen, muss man also für jedes $\epsilon > 0$ ein geeignetes N finden, so dass $|a_n - a| \leq \epsilon$ für alle $n \geq N$. Der Wert a heißt in diesem Fall *Grenzwert* oder *Limes* der Folge.
- Ist (a_n) konvergent gegen a, so ist auch jede Folge, bei der höchstens endlich viele Glieder von (a_n) verschieden sind, konvergent gegen a.
- Eine Folge, die gegen kein Element $a \in K$ konvergiert , heißt *divergent*.

Bespiele:

- $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert gegen a.

  Für jedes $\epsilon > 0$ kann man $N = 1$ wählen und es gilt

  $$|a_n - a| = 0 < \epsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

- $a_n = \frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0.

  Für jedes $\epsilon > 0$ kann man nach Satz 2.4 ein N wählen mit $\frac{1}{N} < \epsilon$. Dann gilt

  $$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

- $a_n = (-1)^n$ divergiert.

  Angenommen es konvergiere gegen a. Dann gibt es ein N mit $|a_n - a| < 1$ für all $n \geq N$. Insbesondere ist $|1-a| < 1$ und $|-1-a| < 1$. Nach der Dreiecksungleichung folgt $2 = |1-(-1)| = |(1-a)+(a-(-1))| \leq |1-a| + |a-(-1)| = |1-a| + |1+a| < 2$, ein Widerspruch.

- $a_n = \frac{n}{n+1}$ konvergiert gegen eins, da $|a_n - 1| = \frac{1}{n+1}$ und nach Satz 2.4 existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein N mit $\frac{1}{N} < \epsilon$ so dass $\frac{1}{n+1} < \epsilon$ für alle $n \geq N$.

Eine Folge (a_n) heißt

- *nach oben beschränkt*, wenn es $M \in K$ gibt mit $a_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- *nach unten beschränkt*, wenn es $M \in K$ gibt mit $a_n \geq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- *beschränkt*, wenn es $M \in K$ gibt mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Eine Folge ist genau dann nach oben und unten beschränkt, wenn sie beschränkt ist. Beweis, siehe Übungsaufgabe.

Satz 3.1 Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis:

Bespiele:

- $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt und divergiert, die Umkehrung des Satzes glit also nicht.
- Die Fibonaccifolge $(1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$ ist unbeschränkt und divergiert deshalb.

Satz 3.2 Jede konvergente Folge hat einen eindeutigen Grenzwert.

Beweis:

Wir beschreiben Konvergenz der Folge (a_n) gegen a durch die Formel

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Satz 3.3 (Algebra von Grenzwerten)
Sind (a_n), (b_n) konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

(a) $(a_n + b_n)$ konvergiert gegen $a + b$.

(b) $(a_n - b_n)$ konvergiert gegen $a - b$.

(c) $(a_n b_n)$ konvergiert gegen ab.

(d) Wenn $b \neq 0$, so konvergiert $(\frac{a_n}{b_n})$ gegen $\frac{a}{b}$.

Beweis:

Satz 3.4 Sind (a_n), (b_n) konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ und $a_n \leq b_n$ so gilt $a \leq b$.

Bemerkung: Wenn $a_n < b_n$, so folgt *nicht* $a < b$!

Beweis:

2.4 Vollständigkeitsaxiom

Eine Folge (a_n) im angeordneten Körper K heißt

- *Cauchyfolge*, wenn $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ mit
$$|a_n - a_m| < \epsilon \text{ für alle } n, m \geq N.$$
- *konvergent gegen* $a \in K$, wenn $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ mit
$$|a_n - a| < \epsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

Satz 4.1 Jede konvergente Folge ist auch eine Cauchyfolge.

Beweis:

Die Gültigkeit der Umkehrung in Satz 4.1. ist das letzte fehlende Axiom, das zur Charakterisierung der reellen Zahlen noch fehlt. Ein archimedisch angeordneter Körper K heißt *vollständig*, wenn für jede Cauchyfolge (a_n) in K ein $a \in K$ existiert, so dass (a_n) gegen a konvergiert.

Vereinbarung: Wir nehmen an, dass ein archimedisch angeordneter, vollständiger Körper existiert, den wir die Menge der reellen Zahlen nennen und mit dem Symbol $\mathbb{R}$ bezeichnen.

Eine Folge heißt *monoton wachsend* wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 4.2 Jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge ist eine Cauchyfolge.

Beweis:

Wir zeigen nun, dass in den reellen Zahlen, anders als etwa in den rationalen Zahlen, der Begriff der Quadratwurzel definiert werden kann.

Satz 4.3 Sei $a > 0$. Die Folge (x_n), die durch $x_0 > 0$ beliebig und

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

definiert ist, konvergiert gegen die eindeutige positive Lösung x der Gleichung $x^2 = a$. Diese wird mit $\sqrt{a}$ bezeichnet.

Beweis: