17.01.2012

13. Übung zu Lineare Algebra I (WS 2011/2012)

Prof. Dr. Sander Zwegers
Dr. Benjamin Kane, Dr. Anton Mellit

Aufgabe 1. (10 Punkte)
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie χ_A und finden Sie alle Eigenwerte von A.

Aufgabe 2. (10 Punkte)
Es sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Weiter sei $\mathbb{B}$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von A. Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist.

Aufgabe 3. (10 Punkte)
Es sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ und $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Zeigen Sie, dass $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$A^k = \sum_{i=0}^{n-1} c_i A^i$$

gilt (wir setzen hier $A^0 = I$ für eine beliebige Matrix A).

Aufgabe 4. (10 Punkte)
Es sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass λ^2 ein Eigenwert von A^2 ist. Zeigen Sie, dass λ oder $-\lambda$ ein Eigenwert von A ist.

Aufgabe 5. (10 Bonuspunkte)
Es sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$.

(1) Seien $v_1, v_2, \ldots, v_r$ Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, so dass $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ gilt. Beweisen Sie, dass $v_1, v_2, \ldots, v_r$ linear unabhängig sind.
(2) Wir nehmen an, dass A Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, hat. Beweisen Sie, dass A diagonalisierbar ist. (Hinweis: Sie dürfen die 2. Aufgabe ohne Beweis benutzen)

Abgabe: Bis Dienstag, den 24.01.2012, 8 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI oder im Hörsaal vor Beginn der Vorlesung.

Bitte, schreiben Sie Ihre Matrikelnummer und Gruppennummer auf jedes Übungsblatt!
Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen und führen Sie Berechnungen explizit aus!