

9. Übung zu Lineare Algebra I (WS 2011/2012)

Prof. Dr. Sander Zwegers
Dr. Benjamin Kane, Dr. Anton Mellit

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Welche der folgenden Mengen M sind Basen von $V = \mathbb{R}^4$?

(1)

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

(2)

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(3)

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Familien von Vektoren im \mathbb{R}^4 linear unabhängig sind und ergänzen Sie diese zu Basen vom \mathbb{R}^4 .

(1) $a_1 = (2, 2, 7, -1), a_2 = (3, -1, 2, 4), a_3 = (1, 1, 3, 1).$

(2) $a_1 = (2, 3, -4, -1), a_2 = (1, -2, 1, 3).$

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Es seien $\psi, \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei lineare Abbildungen.

(1) Es sei $n = 1$. Nehmen Sie an, dass $\varphi(\psi(v)) = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}$ gilt. Zeigen Sie: Für alle $v \in \mathbb{R}$ gilt dann auch $\psi(\varphi(v)) = 0$.(2) Nun sei $n > 1$. Finden Sie zwei lineare Abbildungen $\psi, \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass $\varphi(\psi(v)) = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt und es ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\psi(\varphi(v)) \neq 0$ gibt.

Aufgabe 4. (10 Punkte)

Entscheiden Sie, ob es eine lineare Abbildung φ mit den angegebenen Eigenschaften gibt.

(1) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 3, \quad \varphi \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 1, \quad \varphi \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = 4.$$

(2) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 3, \quad \varphi \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 1, \quad \varphi \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 4.$$

(3) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$,

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5. (10 Bonuspunkte)

Es seien $l_1, l_2, \dots, l_n : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ lineare Abbildungen mit

$$l_1(x)l_2(x) \cdots l_n(x) = 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^m).$$

Zeigen Sie, dass es ein i ($1 \leq i \leq n$) gibt, so dass $l_i(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$ gilt.

Abgabe: Bis Dienstag, den 13.12.2011, 8 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI oder im Hörsaal vor Beginn der Vorlesung.

Bitte, schreiben Sie Ihre Matrikelnummer und Gruppennummer auf jedes Übungsblatt!
Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen und führen Sie Berechnungen explizit aus!