Probeklausur zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Sander Zwegers

Dr. Benjamin Kane, Dr. Anton Mellit

Wir empfehlen, diese Probeklausur wie eine echte Klausur zu bearbeiten. Für die echte Klausur haben Sie 180 Minuten Zeit und Taschenrechner sind nicht erlaubt. Sie können Ergebnisse von den Übungsblättern verwenden, ohne diese nochmals zu beweisen.

Es gibt insgesamt 80 Punkten (wie in der echten Klausur).

Name Vorname Matrikelnummer Studiengang Gruppe

Unterschrift

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
4	
5	

Aufgabe	Punkte
6	
7	
8	

Note

Summe

Name, Matrikelnummer, Gruppe: ______________________________

Aufgabe 1. (10 Punkte)
Berechnen Sie die Lösungsmenge (über $\mathbb{R}$) von folgendem linearen Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Name, Matrikelnummer, Gruppe: ____________________

Aufgabe 2. (10 Punkte)
Entscheiden Sie, ob

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R})$$

invertierbar ist. Falls A invertierbar ist, berechnen Sie die zugehörige inverse Matrix.

Name, Matrikelnummer, Gruppe: ______________________________

Aufgabe 3. (10 Punkte)
Es sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Es sei $P_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ vom Grad kleiner gleich n. Für $0 \leq j \leq n$ definieren wir die Polynome

$$b_{n,j}(x) = \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} \in P_n(\mathbb{R}),$$

worin $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ die Binomial-Koeffizienten sind. Beweisen Sie, dass $\{b_{n,0}, b_{n,1}, \ldots, b_{n,n}\}$ eine Basis von $P_n(\mathbb{R})$ ist.

Name, Matrikelnummer, Gruppe: ______________________________

Aufgabe 4. (10 Punkte)
Es sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Es sei $A_n \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ mit

$$(A_n)_{i,j} = \begin{cases} 3 & \text{für } i = j, \\ 2 & \text{für } j = i+1, \\ 1 & \text{für } i = j+1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad A_n = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\det A_n = 2^{n+1} - 1$ gilt.

Name, Matrikelnummer, Gruppe: ______________________________

Aufgabe 5. (10 Punkte)
Es sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Es seien $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ mit $AB = 0$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B \leq n$ gilt.

Name, Matrikelnummer, Gruppe: ____________________

Aufgabe 6. (10 Punkte)
Es sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Es sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ und v_1 und v_2 Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten λ_1 bzw. λ_2. Nehmen Sie an, dass $v_1 + v_2$ auch ein Eigenvektor ist. Zeigen Sie nun, dass $\lambda_1 = \lambda_2$ folgt.

Name, Matrikelnummer, Gruppe: ____________________

Aufgabe 7. (10 Punkte)

Es sei $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ -5 & 9 & 16 \\ 2 & -4 & -7 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$. Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und berechnen Sie A^{1000}.

Name, Matrikelnummer, Gruppe: ____________________

Aufgabe 8. (10 Punkte)
Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist.

Name, Matrikelnummer, Gruppe: ____________________

Notizpapier

Name, Matrikelnummer, Gruppe: ____________________

Notizpapier

Name, Matrikelnummer, Gruppe: ______________________________

Notizpapier

Name, Matrikelnummer, Gruppe: ______________________________

Notizpapier