Definition 1. Ein Mengensystem $\mathcal{B}$ heißt *schnittstabil*, wenn aus $A, B \in \mathcal{B}$ folgt, dass $A \cap B \in \mathcal{B}$.

Definition 2. Ein Mengensystem $\mathcal{D}$ aus Teilmengen von Ω ist ein *Dynkinsystem*, wenn gilt

- $\Omega \in \mathcal{D}$;
- sind $A, B \in \mathcal{D}$ und $A \subseteq B$, so ist $B \setminus A \in \mathcal{D}$;
- wenn $A_n \in \mathcal{D}$ und $A_n \uparrow A$, so ist $A \in \mathcal{D}$.

Aufgabe 1.1. (5 Punkte)
Ein Mengensystem $\mathcal{A}$ aus Teilmengen von Ω ist genau dann eine σ-Algebra, wenn $\mathcal{A}$ ein schnittstabiles Dynkinsystem ist.

Aufgabe 1.2. ***(Dynkin's Lemma)*** (5 Punkte)
Ist $\mathcal{B}$ ein schnittstabiles Mengensystem aus Teilmengen von Ω, so enthält jedes Dynkinsystem, das $\mathcal{B}$ enthält, auch die von $\mathcal{B}$ erzeugte σ-Algebra.

Aufgabe 1.3. (4 Punkte)
Sei $\Omega = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathcal{C} = \big\{\{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c\}, \{b, d\}\big\}$. Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß, das allen Elementen von Ω die gleiche Wahrscheinlichkeit zuordnet und sei Q das Wahrscheinlichkeitsmaß $\frac{1}{2}(\delta_a + \delta_d)$ (wobei δ_x das Punktmaß in x).

a) Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$ und dass P und Q auf $\mathcal{C}$ übereinstimmen.

b) Zeigen Sie, dass $\{A \in \mathcal{A} \colon P(A) = Q(A)\}$ keine σ-Algebra ist.

c) Zeigen Sie, dass aus b) folgt, dass $\mathcal{C}$ nicht schnittstabil ist.

Aufgabe 1.4. (6 Punkte)
Sei $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Definiere

$$\limsup_{n\to\infty} E_n := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} E_n \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} E_n := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq k} E_n.$$

a) Beweisen Sie das *Lemma von Fatou*

$$\liminf_{n\to\infty} P(E_n) \geq P(\liminf_{n\to\infty} E_n).$$

b) Zeigen Sie, dass aus

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} P(E_n) = 0, \quad \text{(ii)} \sum_{n\in\mathbb{N}} P(E_n \cap E_{n+1}^c) < \infty$$

folgt $P(\limsup_{n\to\infty} E_n) = 0$.

Abgabetermin: bis Dienstag 17.04.2018 um 12 Uhr, Raum 304 MI.
Fragen: `pgracar@math.uni-koeln.de`